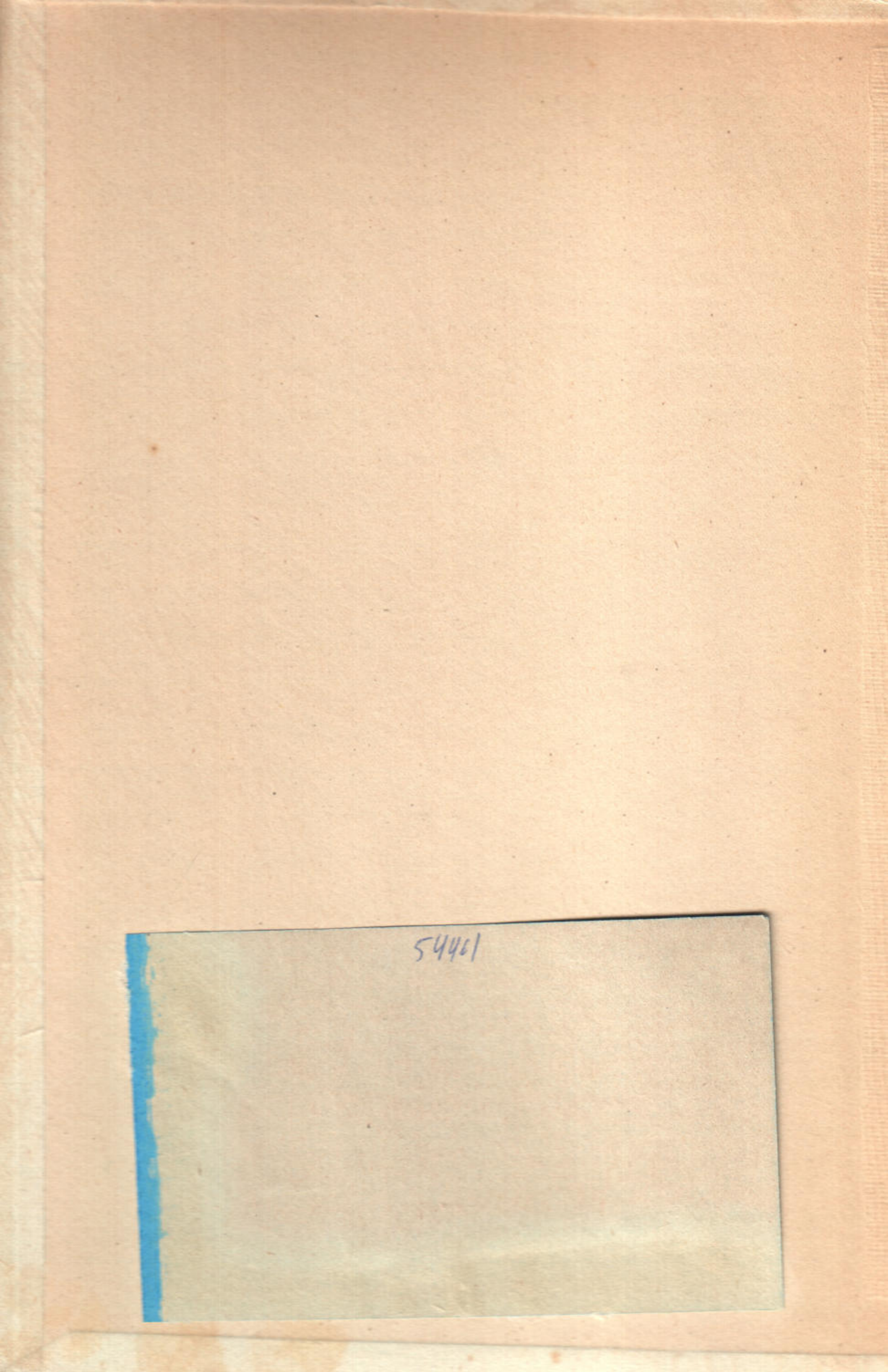
Проф. И. В. Мещерскій

КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАНІЕ
КАССЫ ВЗАИМОПОМОЩИ
СТУДЕНТОВЪ
СПБ. ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА
ПЕТРА ВЕЛИКАГО.

Проф. И. В. Мещерскій. КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.
Ч. I.


54461



Изданіе Кассы Взаимопомощи Студентовъ СПБ. Политехническаго Института
Императора Петра Великаго.

КУРСЪ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Проф. И. В. МЕЩЕРСКАГО.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.
1912

ЛЕКЦІИ,

читанныя проф. И. В. Мещерскимъ на второмъ семестрѣ техническихъ отдѣленій С.-Петербургскаго Политехническаго Института Императора Петра Великаго въ 1912 г.

С Т А Т И К А

В В Е Д Е Н І Е.

Разсматривая положеніе тѣла среди другихъ тѣлъ, мы замѣчаемъ, что разстоянія точекъ этого тѣла отъ точекъ другихъ тѣлъ или остаются постоянными, или измѣняются съ теченіемъ времени: въ первомъ случаѣ мы говоримъ: тѣло *остается въ покоѣ,* во второмъ: тѣло *движется.*

Изученіе покоя и движенія тѣлъ и тѣхъ причинъ, которыми они обусловливаются, составляетъ предметъ *теоретической механики.*

Теоретическая механика, какъ указываетъ самый предметъ этой науки, дѣлится на двѣ части: одна - *статика* разсматриваетъ покой тѣлъ въ связи съ причинами, которыми онъ обусловливается, другая - *кинетика**) разсматриваетъ движеніе тѣлъ и связь, существующую между движеніемъ и вызывающими его причинами.

Мы будемъ разсматривать покой и движеніе *твердыхъ тѣлъ.*

Твердымъ тѣломъ называется въ механикѣ такое тѣло, въ которомъ разстояніе между каждыми двумя точками остается неизмѣннымъ**).

---

*) *Эта часть теоретической механики часто называется Динамикой.*

Введеніе въ кинетику, въ которомъ разсматривается движеніе независимо отъ вызывающихъ его причинъ, называется Кинематикой.

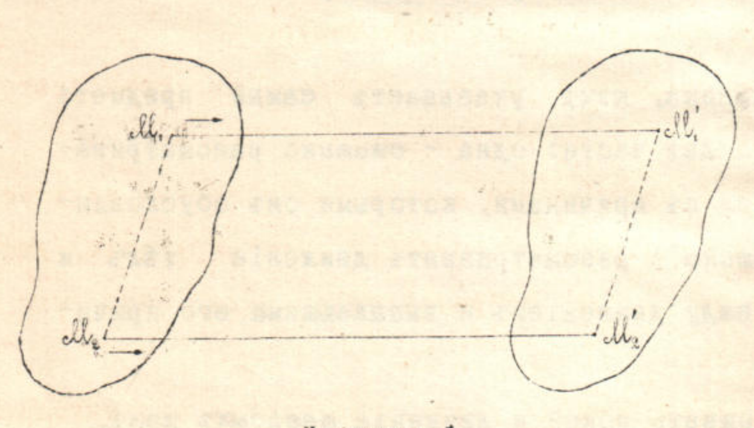
**) *Въ дальнѣйшемъ изложеніи подъ словомъ „тѣло" разумѣется „твердое тѣло."*

Твердое тѣло мы назнваемъ *свободнымъ*, если изъ занимаемаго имъ положенія оно можетъ быть перемѣщено въ какое-угодно сосѣднее положеніе; въ противномъ случаѣ тѣло мы называемъ *несвободнымъ*.

Движенія твердаго тѣла могутъ быть весьма разнообразны; простѣйшее изъ нихъ есть движеніе *поступательное*.

Движеніе тѣла называется *поступательнымъ*, если двѣ какія-либо пересѣкающіяся плоскости, проведенныя черезъ точки тѣла, при движеніи его остаются себѣ параллельными. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что при поступательномъ движеніи тѣла *всякая плоскость*, проведенная черезъ точки тѣла, остается себѣ параллельной, а потому и *всякая прямая*, проведенная черезъ точки тѣла, также остается себѣ параллельной.

Если при поступательномъ движеніи одна изъ точекъ тѣла движется по прямой линіи, то всѣ его точки движутся по прямымъ, параллельнымъ между собою; въ такомъ случаѣ движеніе тѣла называется *прямолинейнымъ* (черт. 1).



Чертежъ 1.

Если при этомъ длины путей, пройденныхъ какою-либо точкою тѣла въ какія угодно равные промежутки времени, равны между собою, то движеніе называется *равномѣрнымъ*.

ГЛАВА I.

Принципы статики.

При изложеніи статики мы будемъ основываться на шести принципахъ, которые принимаемъ безъ доказательствъ.

Первый принципъ (принципъ инерціи, первый законъ Ньютона). *Свободному тѣлу - покоющемуся свойственно оставаться въ покоѣ, а движущемуся поступательно свойственно двигаться прямолинейно и равномѣрно.*

Причины такого состоянія тѣла, которое не объясняется принципомъ инерціи, мы называемъ *силами*.

Силы по своему происхожденію весьма разнообразны, какъ-то: сила тяжести, сила всемірнаго тяготѣнія, сила упругости, давленіе одного тѣла на другое, сопротивленіе среды, силы магнитныя и электрическія.

Силы могутъ дѣйствовать на тѣло тогда, когда оно находится въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно; въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что силы, приложенныя къ тѣлу, находятся въ *равновѣсіи* или *взаимно-уравновѣшиваются*, или также, что тѣло находится *въ равновѣсіи*.

Каждой силѣ мы приписываемъ слѣдующія три свойства: *точку приложенія, направленіе* и *величину*.

Направленіе силы есть направленіе того прямолинейнаго движенія, которое тѣло можетъ получить при дѣйствіи силы.

Прямая, по которой сила направлена въ ту или другую сторону, называется *линіей дѣйствія силы*.

Величину силы мы опредѣляемъ при помощи второго принципа.

Второй принципъ.

Свободное тѣло, при дѣйствіи двухъ силъ, къ нему приложенныхъ, находится въ равновѣсіи тогда и только тогда, когда эти силы равны и направлены по одной прямой въ противоположныя стороны.

Изъ этого принципа слѣдуетъ, что двѣ силы называются *равными*, если покоющееся свободное тѣло послѣ приложенія къ нему этихъ силъ по одной прямой въ противоположныхъ направленіяхъ остается въ покоѣ.

Изъ опредѣленія равныхъ силъ слѣдуетъ, что одна сила будетъ въ n разъ больше другой, если для уравновѣшиванія ея нужно приложить къ тѣлу въ противоположномъ направленіи n силъ, равныхъ второй силѣ.

За *единицу* при измѣреніи силъ мы принимаемъ силу, произвольно выбранную, напримѣръ, вѣсъ въ опредѣленномъ мѣстѣ на земной поверхности одного килограмма, т.е. одного литра дистиллированной воды въ состояніи наибольшей плотности.

Приборы, съ помощью которыхъ производится измѣреніе силъ, называются *динамометрами; динамометръ Понселе* (согнутая подъ угломъ упругая пластинка) и динамометръ *Реньо* (сомкнутая упругая пластинка для измѣренія силъ большей величины) описаны въ элементарныхъ курсахъ физики.

Условившись изображать величину силы, равной единицѣ, произвольно выбраннымъ отрѣзкомъ kl прямой (черт.2), мы можемъ величину силы, содержащей n единицъ, *изобразить* отрѣзкомъ KL, при чемъ $\frac{KL}{kl}=n$.

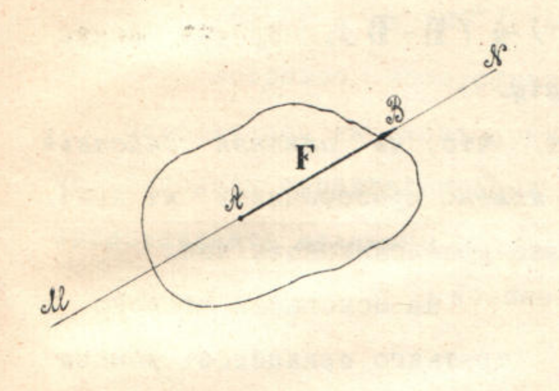
k l K L

Чертежъ 2.

Пусть A точка приложенія силы (черт.3), MN - линія ея дѣйствія, тогда отрѣзокъ $AB=KL$, отложенный по прямой MN отъ точки A въ направленіи

силы, представляетъ *графическое изображенiе силы*.

Иногда отрѣзокъ обозначается одною буквою, напримѣръ, F , и говорятъ: „сила AB " или „сила F ".



Чертежъ 3.

Совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, часто называется *системою силъ*.

Опредѣленiе. Двѣ системы силъ называются *эквивалентными*, если каждая изъ нихъ порознь уравновѣшивается одной и той же системой силъ.

Если система силъ A эквивалентна системѣ силъ B , то говорятъ, что „система A оказываетъ на тѣло такое же дѣйствiе, какъ система B ", или, что „систему A можно замѣнить системою B ".

Если система силъ эквивалентна одной силѣ, то эта сила называется *равнодѣйствующею* системы; силы системы, по отношенiю къ равнодѣйствующей, называются *составляющими*.

Процессъ, посредствомъ котораго мы находимъ равнодѣйствующую для данной системы силъ, называется *сложенiемъ* силъ, а обратный процессъ, посредствомъ котораго для данной силы находимъ эквивалентную ей систему нѣсколькихъ силъ - ея составляющихъ, называется *разложенiемъ* силы.

Если система силъ находится въ равновѣсiи, то относительно такой системы силъ можно сказать, что она эквивалентна нулю. Система силъ, находящаяся въ равновѣсiи, эквивалентна всякой другой системѣ силъ, находящейся также въ равновѣсiи.

Третiй принципъ.

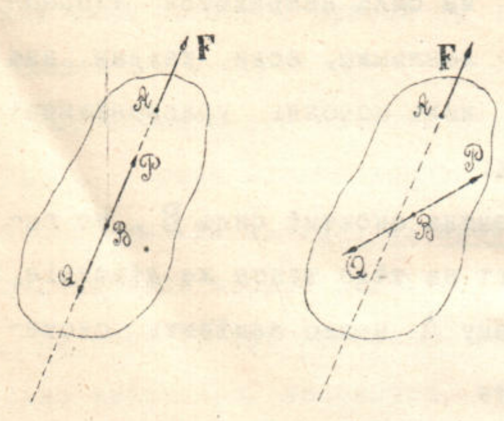
Имѣемъ двѣ эквивалентныя системы A *и* B *, если мы*

присоединимъ къ нимъ, или удалимъ отъ нихъ соответственно двѣ системы силъ **C** *и* **D** *, эквивалентныя между собою, то вновь полученныя системы силъ:* **(A+C)** *и* **(B+D)** *или* **(A-C)** *и* **(B-D)**, *будутъ также эквивалентны другъ другу.*

Изъ этого принципа слѣдуетъ, *что, не измѣняя дѣйствія силъ, приложенныхъ къ тѣлу, мы можемъ присоединить къ нимъ, или удалять изъ нихъ силы взаимно-уравновѣшивающіяся.*

На основаніи второго и третьяго принциповъ доказывается слѣдующая *теорема* (черт.4):

Не измѣняя дѣйствія силы, приложенной къ тѣлу, точку ея приложенія можно перенести въ какую - угодно другую точку, которая или принадлежитъ тѣлу, или разсматривается какъ неизмѣнно съ нимъ связанная, - при томъ и только при томъ условіи, чтобы эта точка находилась на линіи дѣйствія силы.



Чертежъ 4.

Доказательство ясно изъ чертежа 4, гдѣ $\mathcal{A}$ - точка приложенія данной силы **F** ; силы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, приложенныя нами въ точкѣ $\mathcal{B}$, равны и противоположно направлены; на лѣвомъ чертежѣ

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \mathbf{F},$$

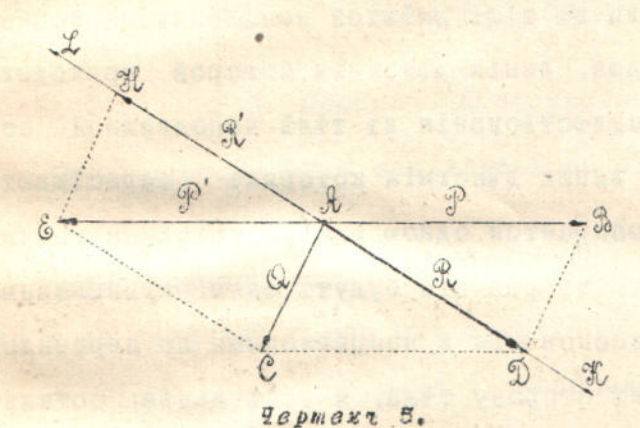
и мы удаляемъ силы $\mathcal{Q}$ и **F** , тогда остается сила $\mathcal{P}$, эквивалентная **F** ; на правомъ чертежѣ силы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ могутъ быть равны и неравны **F**; во всякомъ случаѣ, на основаніи принципа второго, сила $\mathcal{Q}$ не можетъ уравновѣшивать силу **F** , а слѣдовательно, сила $\mathcal{P}$ не можетъ быть эквивалентна силѣ **F**.

Четвертый принципъ.

Равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ и составляющихъ между собою нѣкоторый уголъ (не 0° и не 180°), направлена по діагонали параллелограмма, построеннаго на этихъ силахъ.

Основываясь на этомъ принципѣ, легко доказать, что *длина* діагонали параллелограмма, построеннаго на данныхъ силахъ, представляетъ *величину* равнодѣйствующей (черт. 5).

Доказательство. На чертежѣ 5: A - точка приложенія данныхъ силъ $AB = P$ и $AC = Q$; AK - направленіе ихъ равнодѣйствующей R, величина которой намъ пока неизвѣстна.



Чертежъ 5.

Сила R', равная R, но противоположно направленная, т.е. по прямой AL, будетъ уравновѣшивать данныя силы; если же три силы P, Q, R' находятся въ равновѣсіи, то каждая изъ нихъ уравновѣшиваетъ двѣ другія, поэтому сила P уравновѣшиваетъ Q и R', слѣдовательно, сила P', равная P, но противоположно направленная по прямой AE ($AE = AB$), будетъ равнодѣйствующею для силъ Q и R'; на основаніи принципа четвертаго AE должна быть направлена по діагонали параллелограмма, одна сторона котораго есть AC, а другая направлена по AL; построивши этотъ параллелограммъ $ACEH$, мы найдемъ, что величина силы R' равна AH, а затѣмъ изъ равенства треугольниковъ: AEH и ABD получаемъ, что

$$AH = AD;$$

слѣдовательно:

$$R = AD,$$

т.е. искомая величина равнодѣйствующей $\mathcal{R}$ изображается длиною діагонали $\mathcal{AD}$.

Пятый принципъ.

Въ случаѣ несвободнаго тѣла существованіе опоръ, стѣсняющихъ свободу тѣла, всегда можетъ быть замѣнено присоединеніемъ къ даннымъ силамъ, приложеннымъ къ тѣлу, нѣкоторыхъ новыхъ силъ; эти силы называются реакціями или сопротивленіями опоръ.

Такъ напримѣръ: если въ тѣлѣ имѣется неподвижная точка, то реакція ея будетъ сила, линія дѣйствія которой проходитъ черезъ эту точку; при существованіи въ тѣлѣ неподвижной оси - реакціи будутъ силы, линіи дѣйствія которыхъ пересѣкаютъ данную ось; если тѣло опирается одною или нѣсколькими точками на гладкую плоскость, то реакціи будутъ силы, приложенныя къ тѣлу въ точкахъ прикосновенія и направленныя по перпендикулярамъ къ плоскости въ сторону тѣла, и такъ далѣе; остальныя свойства реакцій опредѣляются изъ условій даннаго вопроса.

Основываясь на пятомъ принципѣ, всякій вопросъ о равновѣсіи *несвободнаго тѣла* мы можемъ привести къ соотвѣтствующему вопросу о равновѣсіи *свободнаго тѣла.*

Шестой принципъ (третій законъ Ньютона).

Всякому дѣйствію соотвѣтствуетъ равное и противоположное противодѣйствіе.

На основаніи двухъ послѣднихъ принциповъ мы заключаемъ, что несвободное тѣло оказываетъ на опору „дѣйствіе", равное и противоположное реакціи; это дѣйствіе называется „давленіемъ" тѣла на опору.

СТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ.

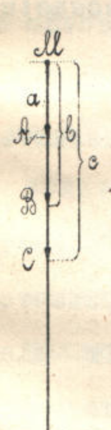
ГЛАВА II.

СЛОЖЕНІЕ, РАЗЛОЖЕНІЕ И РАВНОВѢСІЕ СИЛЪ, ПРИЛОЖЕННЫХЪ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

§ 1. Способъ „многоугольника силъ".

1-ый случай. Силы направлены по одной прямой въ одну и ту же сторону.

Равнодѣйствующая данныхъ силъ направлена въ ту же сторону и по величинѣ равна ихъ суммѣ.



Въ случаѣ, изображенномъ на чертежѣ 6, равнодѣйствующая силъ: $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$ будетъ сила $MD = a + b + c$. Разложеніе данной силы на n *составляющихъ* силъ, направленныхъ по той же прямой въ ту же сторону, приводится къ разложенію даннаго числа на n арифметическихъ слагаемыхъ и будетъ опредѣленнымъ только при заданіи ($n-1$) составляющихъ; при этомъ сумма заданныхъ составляющихъ должна быть *менѣе* данной силы.

Чертежъ 6.

Равновѣсіе силъ въ разсматриваемомъ случаѣ невозможно.

2-ой случай. Силы направлены по одной прямой въ различныя стороны.

Въ этомъ случаѣ мы приписываемъ величинамъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, знакъ плюсъ, а въ противоположную

сторону знакъ минусъ, и находимъ ихъ алгебраическую сумму.

Величина равнодѣйствующей будетъ равна абсолютной величинѣ этой суммы, а направленіе равнодѣйствующей опредѣляется знакомъ суммы.



Чертежъ 7.

Въ случаѣ, изображенномъ на чертежѣ 7, a, b, c положительныя числа, d и e - отрицательныя; равнодѣйствующая

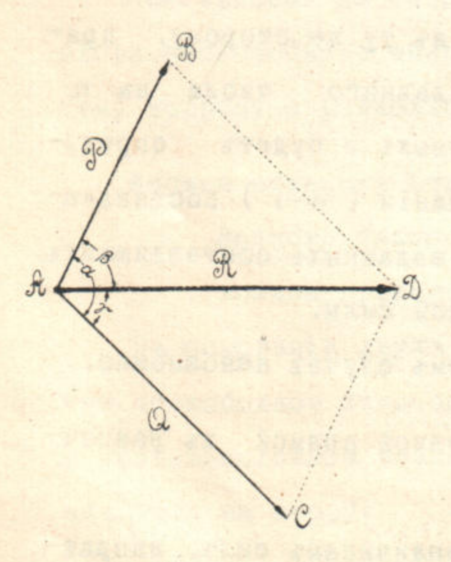
$$R = a + b + c + d + e$$

и направлена въ ту же сторону, что и сила MA.

Разложеніе данной суммы на n составляющихъ силъ, направленныхъ по той же прямой, - вообще говоря, въ разныя стороны, приводится къ разложенію даннаго числа на n алгебраическихъ слагаемыхъ и будетъ опредѣленнымъ при заданіи $(n - 1)$ слагаемыхъ.

Въ рассматриваемомъ случаѣ силы находятся *въ равновѣсіи,* если алгебраическая сумма ихъ величинъ равна нулю.

3-ій случай. Двѣ силы, направленія которыхъ составляютъ уголъ, не равный 0° или 180°.



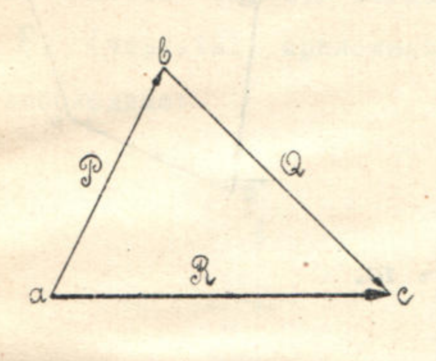
Чертежъ 8.

Четвертый принципъ даетъ: *равнодѣйствующая* изображается по величинѣ и направленію діагональю параллелограмма, построеннаго на линіяхъ, изображающихъ двѣ данныя силы (черт. 8).

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что въ настоящемъ случаѣ вмѣсто параллелограмма можемъ построить *треугольникъ* (черт.9); изъ про-

извольно взятой точки a проводимъ прямую ab, равную и параллельную силѣ P, изъ конца ея b проводимъ прямую bc, равную и параллельную силѣ Q; соединяя точку a съ c, получаемъ прямую ac, которая изображаетъ величину и направленіе равнодѣйствующей R.

Для опредѣленія величины равнодѣйствующей и соотвѣтствующихъ угловъ посредствомъ *вычисленія* имѣемъ слѣдующія формулы:



Чертежъ 8.

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ.\cos\alpha,$$

$$\sin\beta = \sin\alpha \cdot \frac{Q}{R},$$

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \frac{P}{R},$$

$$\frac{P}{\sin\gamma} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

На основаніи предыдущаго получается *разложеніе* данной силы на двѣ составляющія, направленія которыхъ составляютъ уголъ не 0° и не 180°; при этомъ могутъ быть даны:

1) величина и направленіе одной составляющей,

2) линіи дѣйствія обѣихъ составляющихъ,

3) величины обѣихъ составляющихъ,

4) величина одной составляющей и направленіе другой.

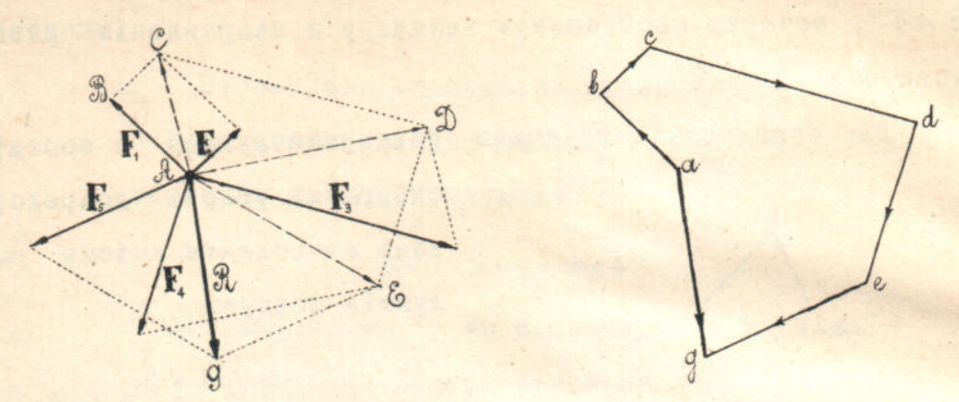
Равновѣсіе въ разсматриваемомъ случаѣ *невозможно.*

4-ый случай. Какое угодно число силъ, линіи дѣйствія которыхъ лежатъ въ одной плоскости.

Послѣдовательно примѣняя правило параллелограмма, приходимъ къ слѣдующему заключенію: *равнодѣйствующая* изображается по величинѣ и направленію *замыкающею* многоугольника, стороны котораго изображаютъ по величинѣ и направленію данныя силы.

Этотъ многоугольникъ называется *многоугольникомъ силъ.*

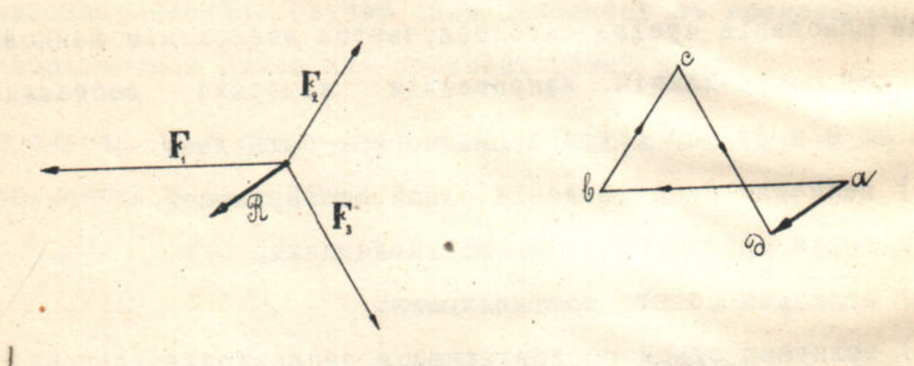
Для силъ F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 многоугольникъ силъ будетъ $ABCDEG$ или, на отдѣльномъ чертежѣ, „$abcdeg$" (черт. 10).



Чертежъ 10.

Равнодѣйствующая $R = AG = ag$.

Замѣтимъ, что стороны многоугольника силъ могутъ пересѣкаться, какъ напримѣръ, для силъ F_1, F_2, F_3 (черт.11) многоугольникъ $abcd$ будетъ многоугольникъ силъ.



Чертежъ 11.

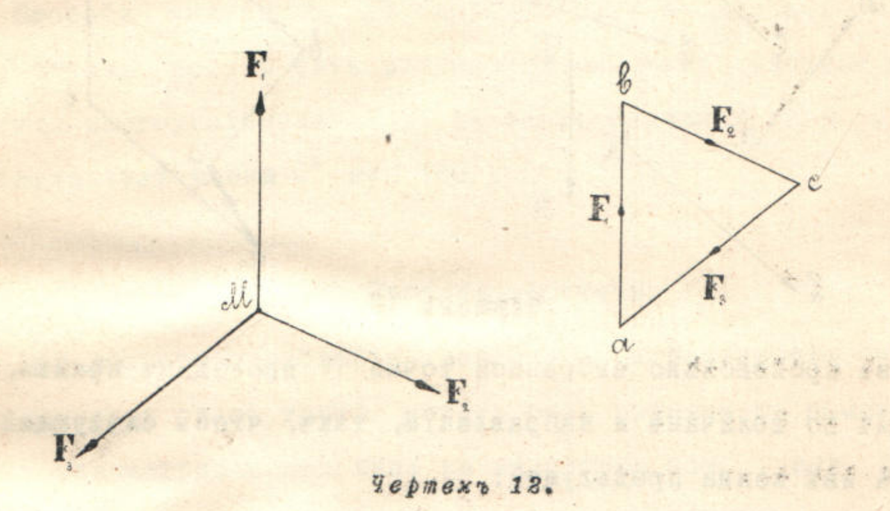
Величина и направленіе *равнодѣйствующей,* очевидно, не измѣнится, если мы измѣнимъ порядокъ, въ которомъ проводимъ стороны многоугольника силъ одну за другой, или нѣкоторыя данныя силы замѣнимъ ихъ равнодѣйствующей.

Разложеніе данной силы на n составляющихъ въ одной съ нею плоскости производится на основаніи предыдущаго построенія; оно становится опредѣленнымъ тогда, когда заданы по величинѣ и направленію (n - 1) составляющихъ, а относительно

остальныхъ двухъ извѣстно то, что указано въ предыдущемъ случаѣ.

Для *равновѣсія* скольких угодно силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, необходимо и достаточно, чтобы многоугольникъ силъ былъ *замкнутъ*.

Въ частномъ случаѣ, когда мы имѣемъ только *три* силы F_1, F_2, F_3, (черт. 12), приложенныя въ одной точкѣ, для равновѣсія необходимо:



Чертежъ 12.

во 1-ыхъ, чтобы онѣ лежали въ одной плоскости, такъ какъ одна изъ нихъ должна быть равна и противоположна равнодѣйствующей двухъ другихъ, и

во 2-хъ, чтобы онѣ удовлетворяли равенствамъ:

$$\frac{F_1}{\sin(F_2,F_3)}=\frac{F_2}{\sin(F_1,F_3)}=\frac{F_3}{\sin(F_1,F_2)},$$

такъ какъ многоугольникъ силъ въ этомъ случаѣ обращается въ треугольникъ.

Замѣтимъ, что отрѣзокъ прямой, имѣющій опредѣленную величину и опредѣленное направленіе, называется *векторомъ*; по-

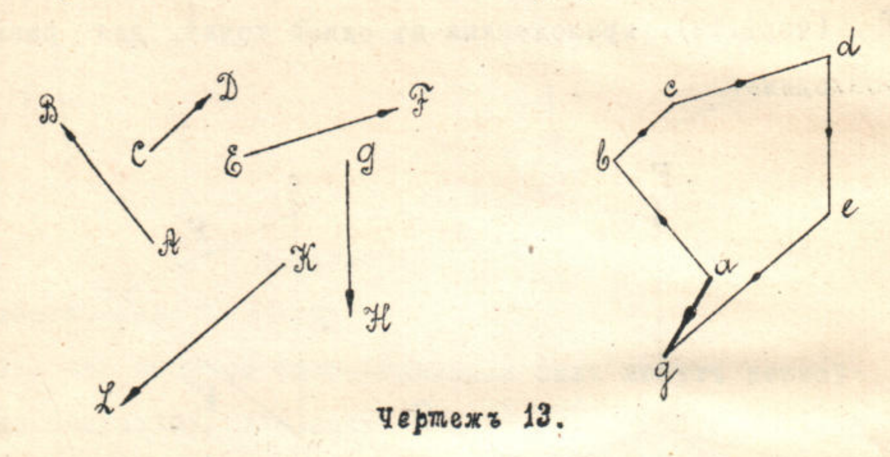
---

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. МЕЩЕРСКІЙ.
Изданіе Кассы Взаимопомощи Студ. СПБ. Политехн. Института.
Типо-литографія И. Трофимова. СПБ. Можайская, 3.
Корректоръ А. Собакаевъ. *Листъ 2.*

этому *сила* можетъ быть разсматриваема, какъ векторъ.

Мы говоримъ, что два вектора *равны по величинѣ и направленію,* если они имѣютъ одинаковую длину, параллельны и направлены въ одну сторону.

Пусть даны векторы AB, CD, EF, GH, KL, какъ угодно расположенные въ плоскости (черт.13).



Чертежъ 13.

Изъ произвольно выбранной точки a проводимъ прямыя, равныя имъ по величинѣ и направленію, такъ, чтобы слѣдующая выходила изъ конца предыдущей:

$$ab \# AB;$$
$$bc \# CD;$$
$$cd \# EF;$$
$$de \# GH;$$
$$eg \# KL.$$

Этотъ процессъ называется *геометрическимъ сложеніемъ* данныхъ векторовъ, а замыкающая полученнаго многоугольника ag, направленная отъ точки a къ точкѣ g, называется ихъ *геометрической суммою.*

Геометрическая сумма не измѣнится, если мы измѣнимъ *порядокъ* слагаемыхъ или нѣсколько слагаемыхъ замѣнимъ ихъ *геометрической суммою.*

Арифметическую и алгебраическую сумму можно разсматривать,

какъ частные случаи суммы геометрической, когда слагаемые векторы параллельны и направлены всѣ въ одну сторону или въ разныя стороны.

На основаніи предыдущаго получаемъ слѣдующую общую *теорему:*

равнодѣйствующая сколькихъ угодно силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ и лежащихъ въ одной плоскости, равна по величинѣ и направленію *геометрической суммѣ* этихъ силъ.

Способы, указанные для сложенія силъ въ первомъ и второмъ случаѣ, могутъ быть разсматриваемы, какъ частные случаи правила многоугольника силъ: въ этихъ случаяхъ углы многоугольника силъ равны 0° или 180°.

§ 2. *Способъ проекцій.*

Всѣ вопросы о сложеніи, разложеніи и равновѣсіи силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, могутъ быть рѣшаемы съ помощью *проекцій* разсматриваемыхъ силъ на нѣкоторыя оси; для большей простоты эти оси берутся обыкновенно взаимноперпендикулярными.

Изъ геометріи извѣстно, что проекція замыкающей многоугольника на какую угодно ось равна суммѣ проекцій сторонъ этого многоугольника на ту же ось.

Примѣняя это предложеніе къ *многоугольнику силъ*, получаемъ слѣдующую теорему:

Проекція равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, на всякую ось, равна суммѣ проекцій составляющихъ силъ на ту же самую ось.

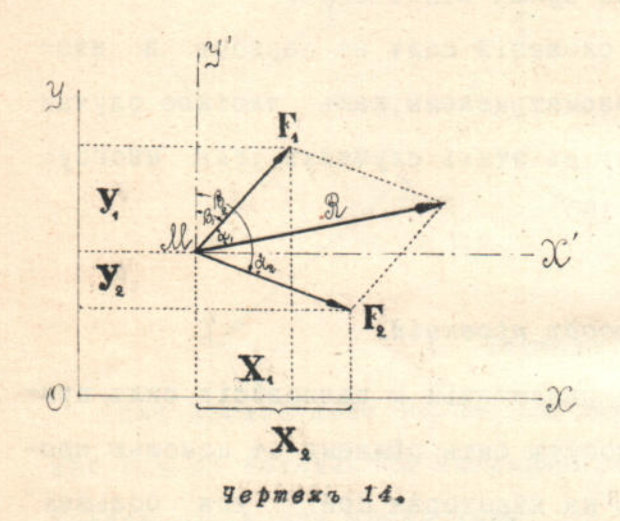
Пусть будутъ F_1, F_2, F_3 .... F_n составляющія силы, лежащія въ одной плоскости, и R ихъ равнодѣйствующая.

Возьмемъ въ плоскости силъ двѣ взаимноперпендикулярныя оси OX и OY (черт.14); обозначимъ проекціи на эти оси

силъ F_1 черезъ X_1 и Y_1 ; F_2 черезъ X_2 и Y_2;........F_n черезъ X_n и Y_n ; тогда имѣемъ:

$$X_1 = F_1 \cos\alpha_1 \,;\quad Y_1 = F_1 \cos\beta_1 \,;$$
$$X_2 = F_2 \cos\alpha_2 \,;\quad Y_2 = F_2 \cos\beta_2 \,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = F_n \cos\alpha_n \,;\quad Y_n = F_n \cos\beta_n ,$$

если α_1 и β_1 суть углы, которые сила F_1 образуетъ осями OX и OY ;.... ....α_n, β_n - углы, которые сила F_n образуетъ съ осями OX и OY *).



Чертежъ 14.

Проекціи равнодѣйствующей R обозначимъ черезъ X и Y; тогда, на основаніи вышеуказанной теоремы, получимъ:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \,;$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots\ldots\ldots \; Y_n = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \,.$$

Величина равнодѣйствующей и направленіе ея опредѣляются съ помощью формулъ:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \,,$$

$$\cos(R, OX) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \,,$$

---

*) *Для построенія этихъ угловъ мы можемъ или изъ точки M провести двѣ прямыя MX' и MY', параллельныя осямъ OX и OY, какъ представлено на чертежѣ, или изъ начала координатъ провести прямыя, параллельныя силамъ, въ соотвѣтствующую сторону.*

$$\cos(R.OY) = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что *условіе*, необходимое и достаточное для *равновѣсія* силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ и лежащихъ въ одной плоскости, выражается двумя равенствами:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0.$$

Примѣчаніе. Задачи рѣшаются съ помощью построенія или соотвѣтствующаго вычисленія.

При этомъ, если въ задачу входятъ растягиваемыя нити, сжимаемые или растягиваемые стержни, нужно имѣть въ виду слѣдующее:

1) Если нить находится въ равновѣсіи, то величина растягивающаго усилія въ каждой изъ ея точекъ одна и та же и равна величинѣ каждой изъ двухъ равныхъ силъ, приложенныхъ къ ея концамъ.

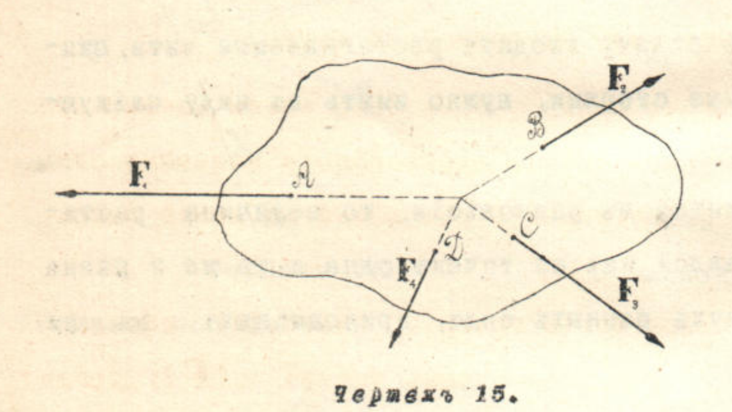
2) Если стержень находится въ равновѣсіи, то величина растягивающаго или сжимающаго усилія во всѣхъ точкахъ стержня одна и та же и равна величинѣ одной изъ двухъ равныхъ силъ, приложенныхъ къ концамъ стержня.

ГЛАВА III.

СИЛЫ, ПРИЛОЖЕННЫЯ ВЪ РАЗНЫХЪ ТОЧКАХЪ ТѢЛА И ДѢЙСТВУЮЩІЯ ПО ЛИНІЯМЪ, ПЕРЕСѢКАЮЩИМСЯ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

§ 1.

Въ настоящемъ случаѣ, перенося точки приложенія силъ въ общую точку пересѣченія ихъ линій дѣйствія, мы приходимъ къ случаю, разсмотрѣнному въ предыдущей главѣ (черт. 15).



Чертежъ 15.

При рѣшеніи задачъ на сложеніе и разложеніе силъ посредствомъ *построенія* въ настоящемъ случаѣ представляются нѣкоторыя особенности тогда, когда точка пересѣченія линій дѣйствія данныхъ силъ не помѣщается въ предѣлахъ чертежа.

Въ случаѣ трехъ силъ представляются слѣдующія задачи:

1) Найти равнодѣйствующую двухъ данныхъ силъ. 2) Даны: сила и одна составляющая, найти другую составляющую. 3) Даны: сила, линія дѣйствія одной ея составляющей и величина другой; найти величину первой и линію дѣйствія второй. 4) Даны: сила, линія дѣйствія одной ея составляющей и точка приложенія другой; найти величину первой, направленіе и величину второй.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ требуется только узнать, *проходитъ ли равнодѣйствующая данныхъ силъ черезъ данную точку или нѣтъ,* напримѣръ, въ вопросѣ о *равновѣсіи рычага.*

Рычагомъ называется твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось и подверженное дѣйствію силъ, направленныхъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ оси.

На основаніи пятаго принципа для равновѣсія рычага необходимо и достаточно, чтобы силы, къ нему приложенныя, имѣли равнодѣйствующую, которая проходила бы черезъ точку пересѣченія оси съ плоскостью силъ: онѣ будутъ тогда уравновѣшиваться реакціей оси.

При рѣшеніи вопросовъ о равновѣсіи рычага, а также многихъ другихъ вопросовъ, весьма полезно понятіе *о моментѣ силы относительно точки.*

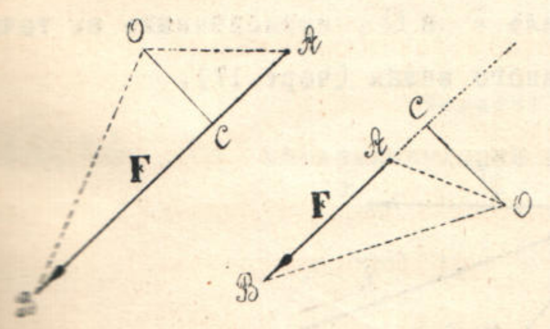
§ 2. *Моментъ силы относительно точки.*

Опредѣленіе. Моментомъ силы относительно точки называется взятое со знакомъ плюсъ или минусъ произведеніе величины силы на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на линію дѣйствія силы.

Моментъ силы $\mathbf{F}$ относительно точки O (черт. 16) обозначимъ черезъ $m(\mathbf{F})$; тогда по опредѣленію будетъ:

$$m(\mathbf{F}) = \pm(AB.OC),$$

слѣдовательно, равняется удвоенной площади треугольника OAB, взятой со знакомъ плюсъ или минусъ.



Чертежъ 16.

Точка O, относительно которой находимъ моментъ силы, называется *центромъ моментовъ*. Перпендикуляръ OC называется *плечомъ момента.*

Въ выраженіи момента берется знакъ *плюсъ* тогда, когда наблюдатель, стоящій въ центрѣ момента, на плоскости, заключаю-

щей этотъ центръ и силу, видитъ силу направленною слѣва направо - въ противоположномъ случаѣ берется знакъ *минусъ*.

Въ первомъ случаѣ сила стремится вращать плоскость чертежа вокругъ центра момента по часовой стрѣлкѣ, а во второмъ - противъ часовой стрѣлки.

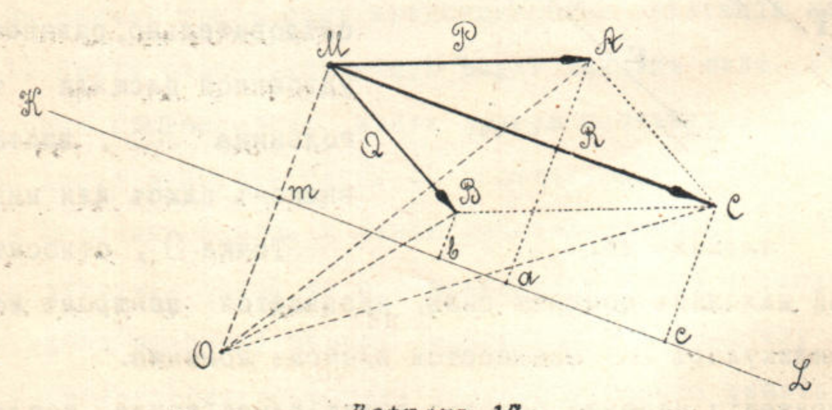
Изъ опредѣленія момента силы относительно точки слѣдуетъ: 1) моментъ силы не измѣняется при переносѣ точки приложенія силы по линіи ея дѣйствія; 2) моменты силы относительно центровъ, лежащихъ на одной прямой, параллельной линіи дѣйствія силъ, равны между собою; 3) моментъ силы относительно точки равенъ нулю тогда и только тогда, когда эта точка лежитъ на линіи дѣйствія силы.

Теорема Вариньона.

Моментъ равнодѣйствующей двухъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, относительно центра, лежащаго въ ихъ плоскости, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра.

Доказательство.

Первый случай: моменты силъ P и Q, приложенныхъ въ точкѣ M, относительно центра O одного знака (черт. 17).



Чертежъ 17.

Проводимъ прямую $KL \perp OM$ и прямыя Aa, Bb, Cc, перпен-

дикулярныя къ прямой KL ; тогда

$$пл.\triangle OMA = \frac{1}{2} OM.ma,$$

$$пл.\triangle OMB = \frac{1}{2} OM.mb,$$

$$пл.\triangle OMC = \frac{1}{2} OM.mc;$$

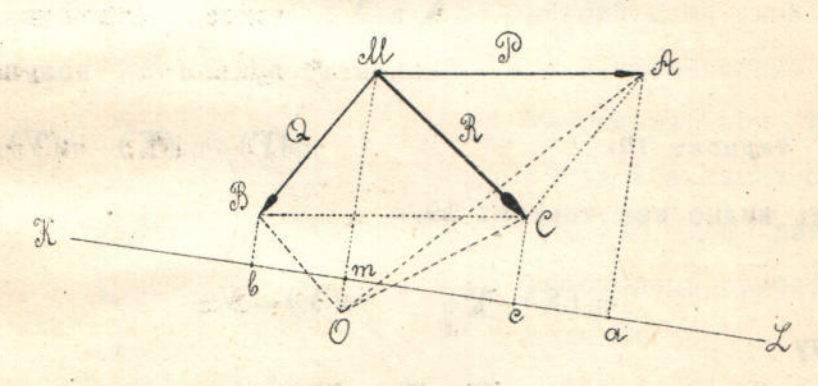
такъ какъ $mb = ac$, то $mc = ma + mb$, и слѣдовательно:

$$пл.\triangle OMC = пл.\triangle OMA + пл.\triangle OMB;$$

отсюда, обозначая слово "моментъ" буквою m, получаемъ:

$$m(R) = m(P) + m(Q).$$

Второй случай: моменты силъ P и Q, приложенныхъ въ точкѣ M, относительно центра O разныхъ знаковъ (черт. 18).



Чертежъ 18.

Aa, Bb, Cc перпендикулярны къ KL; $KL \perp OM$.

$$пл.\triangle OMA = \frac{1}{2} OM.ma,$$

$$пл.\triangle OMB = \frac{1}{2} OM.mb,$$

$$пл.\triangle OMC = \frac{1}{2} OM.mc;$$

такъ какъ $mb = ac$, то $mc = ma - mb$, и слѣдовательно

$$пл.\triangle OMC = пл.\triangle OMA - пл.\triangle OMB,$$

но

$$m(Q) = -2\,пл.\Delta OMB\,;$$

поэтому имѣемъ:

$$m(R) = m(P) + m(Q)\,.$$

Слѣдствія, вытекающія изъ теоремы Вариньона:

1) Съ помощью доказанной теоремы можно получить *аналитическое* выраженіе для момента силы относительно точки.

Центръ момента принимаемъ за начало координатныхъ осей OX и OY (черт. 19). Пусть будутъ x, y координаты точки приложенія силы $\mathbf{F}$, а $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ - проекціи ея на оси координатъ.

Разложимъ силу $\mathbf{F}$ на двѣ составляющія, параллельныя координатнымъ осямъ; - онѣ будутъ равны $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$; тогда, обозначая слово "моментъ" буквою m, получимъ:

Чертежъ 19.

$$m(\mathbf{F}) = m(\mathbf{X}) + m(\mathbf{Y});$$

но, какъ видно изъ чертежа 19,

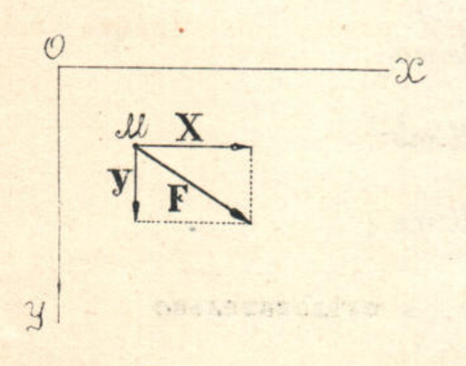
$$m(\mathbf{X}) = \mathbf{X}.y\,, \quad m(\mathbf{Y}) = -\mathbf{Y}.x\,,$$

а потому

$$m(\mathbf{F}) = \mathbf{X}y - \mathbf{Y}x\,.$$

Если ось OY имѣетъ противоположное направленіе (черт. 20), то

$$m(\mathbf{F}) = x\mathbf{Y} - y\mathbf{X}\,.$$



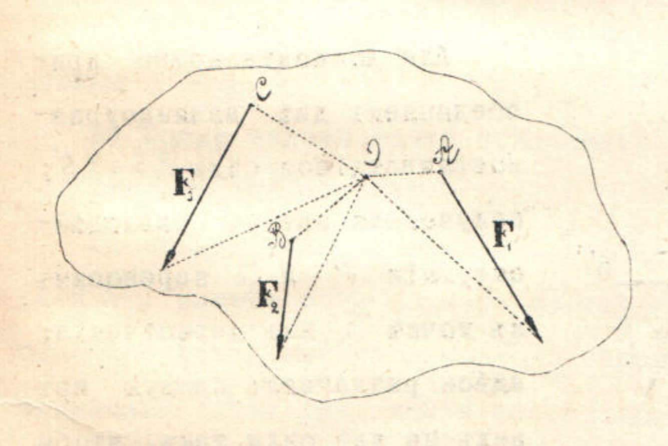
Чертежъ 20.

2) Въ томъ случаѣ, когда число данныхъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, *болѣе двухъ:* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... $\mathbf{F}_n$, мы примѣняемъ послѣдовательно теорему Вариньона, сначала къ равнодѣйствующей R_1 силъ $\mathbf{F}_1$

и F_2, затѣмъ къ равнодѣйствующей R_2 силъ R_1 и F_3 и т.д.; получаемъ слѣдующую теорему:

Моментъ равнодѣйствующей сколькихъ угодно силъ, направленныхъ въ одной плоскости по линіямъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ, относительно центра, лежащаго въ плоскости силъ, *равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра.*

Отсюда мы заключаемъ, что для *равновѣсія рычага* при дѣйствіи силъ, направленныхъ по линіямъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая *сумма моментовъ силъ* относительно точки, въ которой ось рычага пересѣкаетъ плоскость силъ, *равнялась нулю,* такъ какъ тогда моментъ равнодѣйствующей равенъ нулю, и, слѣдовательно, линія дѣйствія ея проходитъ через неподвижную точку: напримѣръ, при дѣйствіи на рычагъ трехъ силъ F_1, F_2, F_3 для равновѣсія необходимо существованіе равенства:



Чертежъ 21.

$$m(F_1) + m(F_2) + m(F_3) = 0.$$

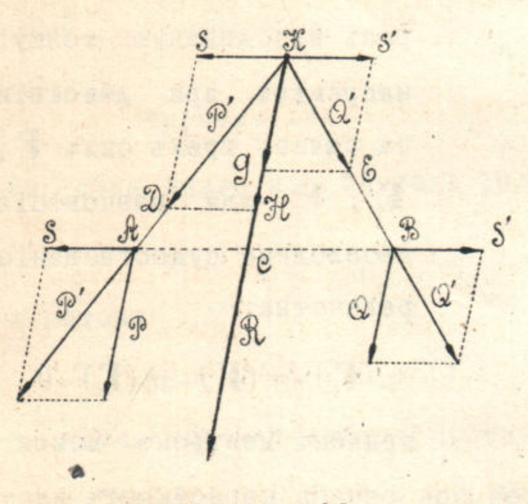
причемъ центромъ моментовъ служитъ точка O, въ которой ось рычага пересѣкаетъ плоскость чертежа (черт. 21).

ГЛАВА IV.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ СИЛЫ ВЪ ПЛОСКОСТИ.

§ 1. *Двѣ параллельныя силы, направленныя въ одну сторону.*

Равнодѣйствующая R двухъ параллельныхъ силъ P и Q, направленныхъ въ одну сторону, равна ихъ суммѣ, имъ параллельна и направлена въ ту же сторону по линіи, которая проходитъ между точками приложенія данныхъ силъ и дѣлитъ прямую, соединяющую эти точки, на части, обратно пропорціональныя силамъ (чертежъ 22).



Чертежъ 22.

Для доказательства присоединяемъ двѣ взаимноуравновѣшивающіяся силы $AS = BS'$; полученныя затѣмъ равнодѣйствующія P' и Q' переносимъ къ точкѣ K ихъ пересѣченія; здѣсь разлагаемъ каждую изъ нихъ на двѣ силы такъ, чтобы двѣ составляющія KS и KS' были равны и параллельны присоединеннымъ силамъ; получаемъ двѣ другія составляющія:

$$KH = P$$

и

$$KG = Q,$$

направленныя по прямой KC ; ихъ сумма и будетъ искомая равнодѣйствующая R :

$$R = P + Q.$$

Изъ подобія треугольниковъ DKH и ACK слѣдуетъ: $\frac{KH}{KC} = \frac{DH}{AC}$.

а изъ подобія треугольниковъ EGK и BCK : $\frac{KG}{KC}=\frac{GE}{BC}$; дѣлимъ почленно одно равенство на другое и, принимая во вниманіе, что $DH=GE$, получаемъ:

$$\frac{KH}{KG}=\frac{BC}{AC}\text{, или }\frac{P}{Q}=\frac{BC}{AC},$$

слѣдовательно:

$$P.AC=Q.BC.$$

Изъ равенствъ: $\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}$ и $R=P+Q$ слѣдуетъ:

$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB}.$$

На основаніи послѣднихъ формулъ легко разложить данную силу R на двѣ, ей параллельныя и одинаково направленныя, составляющія:

1) Когда заданы величина и точка приложенія одной составляющей $P<R$;

2) Когда заданы точки приложенія составляющихъ, лежащія по обѣ стороны данной силы.

Любая изъ точекъ, лежащихъ на линіи дѣйствія равнодѣйствующей R , можетъ быть принята за точку ея приложенія; но только одна изъ нихъ, именно точка C , находящаяся на прямой AB , соединяющей точки приложенія составляющихъ P и Q , обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ:

если силы P и Q будутъ повернуты вокругъ ихъ точекъ приложенія на одинъ и тотъ же уголъ въ одну и ту же сторону, то точка C сохранитъ свое положеніе, какъ видно изъ предыдущихъ формулъ, и равнодѣйствующая R будетъ повернута вокругъ нея на тотъ же уголъ.

Точка C называется *центромъ параллельныхъ силъ* P *и* Q.

Пусть x_1 и y_1 будутъ координаты точки A , x_2 и y_2 - координаты точки B ; точка C дѣлитъ разстояніе AB на части, обратно пропорціональныя силамъ P и Q; поэтому, пользуясь

формулами аналитической геометрiи для координатъ точки, дѣлящей данный отрѣзокъ въ данномъ отношенiи и лежащей между концами отрѣзка, мы получимъ для координатъ x_c и y_c точки C слѣдующiя выраженiя:

$$x_c = \frac{Px_1 + Qx_2}{P+Q} \quad , \quad y_c = \frac{Py_1 + Qy_2}{P+Q} \quad ;$$

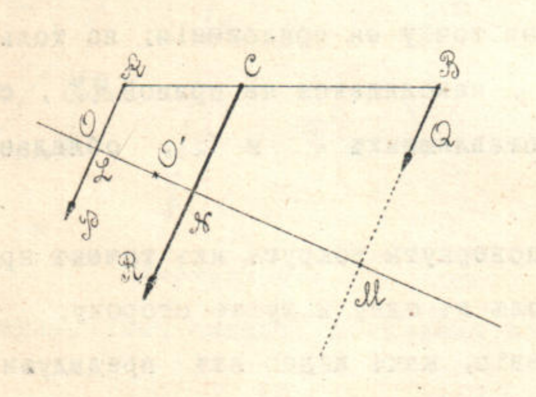
Т е о р е м а . Моментъ равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, относительно какого либо центра, лежащаго въ ихъ плоскости, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра.

Доказательство.

Первый случай: моменты одинаковыхъ знаковъ. Центръ моментовъ O (черт. 23). Прямая OM перпендикулярна къ направленiю силъ.

Имѣемъ:

$$P.OL + Q.OM = P(ON - LN) + Q(ON + NM) =$$
$$= (P+Q).ON + P.LN - Q.NM \ ;$$



Чертежъ 23.

но

$$P.AC = Q.BC \ ,$$

а такъ какъ

$$AC : LN = BC : MN \ ;$$

то

$$P.LN = Q.MN \ ;$$

кромѣ того

$$P + Q = R \ ,$$

получаемъ

$$P.OL + Q.OM = R.ON \ .$$

Второй случай: моменты разныхъ знаковъ.

Центръ моментовъ O' (черт. 23): доказательство аналогичное предыдущему.

Въ обоихъ случаяхъ имѣемъ:

$$m(R) = m(P) + m(Q) .$$

§ 2. *Какое угодно число параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости и направленныхъ въ одну сторону.*

Обозначимъ величины этихъ силъ черезъ $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$, а координаты точекъ ихъ приложенія соотвѣтственно черезъ x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; $\ldots\ldots x_n$, y_n.

Примѣняя послѣдовательно правило предыдущаго параграфа для сложенія двухъ параллельныхъ силъ, сначала къ равнодѣйствующей R_1 силъ P_1 и P_2, затѣмъ къ равнодѣйствующей R_2 силъ R_1 и P_3 и т.д., мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Равнодѣйствующая скольскихъ угодно параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной и той же плоскости и направленныхъ въ одну сторону, равна ихъ суммѣ

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_n ,$$

имъ параллельна, направлена въ ту же сторону, и линія дѣйствія ея проходитъ черезъ точку, координаты которой x_c и y_c выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$x_c = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots\ldots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \ldots\ldots\ldots + P_n} ;$$

$$y_c = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots\ldots + P_n y_n}{P_1 + P_2 + \ldots\ldots\ldots + P_n} .$$

Если силы P_1, P_2, $\ldots\ldots\ldots P_n$ повернемъ на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ ихъ точекъ приложенія, то равнодѣйствующая ихъ повернется на тотъ же уголъ вокругъ точки (x_c , y_c), координаты которой выражаются только что написанными формулами.

Эта точка называется *центромъ параллельныхъ силъ.*

Примѣняя послѣдовательно теорему предыдущаго параграфа о *моментѣ* равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ, сначала къ

равнодѣйствующей R_1 силъ P_1 и P_2, затѣмъ къ равнодѣйствующей R_2 силъ R_1 и P_3 и т. д., мы получаемъ:

Моментъ равнодѣйствующей сколькихъ угодно параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости и направленныхъ въ одну сторону, относительно центра, лежащаго въ ихъ плоскости, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра:

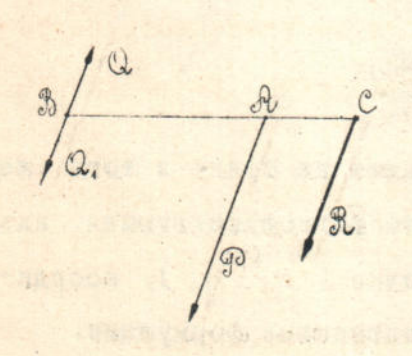
$$m(R) = m(P_1) + m(P_2) + \ldots\ldots + m(P_n).$$

§ 3. *Двѣ неравныя параллельныя силы, направленныя въ разныя стороны.*

Равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ P и Q, направленныхъ въ разныя стороны, равна ихъ разности, имъ параллельна, направлена въ сторону бо́льшей силы по линіи, которая проходитъ внѣ точекъ приложенія данныхъ силъ, со стороны бо́льшей силы, и дѣлитъ прямую, соединяющую эти точки, на части, обратно пропорціональныя силамъ.

Доказательство.

Даны: сила P, приложенная въ точкѣ A, и сила $Q < P$, приложенная въ точкѣ B (черт.24) и направленная въ противоположную сторону.



Чертежъ 24.

Силу P, большую изъ данныхъ силъ, разлагаемъ на двѣ силы, ей параллельныя, изъ которыхъ одна, Q_1, приложена въ точкѣ B, равна Q и направлена въ сторону противоположную Q; на основаніи параграфа 1 найдемъ вторую составляющую R; сила R, приложенная въ точкѣ C, и будетъ искомою равнодѣйствующею, такъ какъ силы Q и Q_1, какъ взаимно-

уравновѣшивающіяся, можемъ удалить.

Имѣемъ:

$$R = P - Q\ ;\quad P.AC = Q.BC\ ,\quad \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

На основаніи этихъ формулъ легко разложить данную силу R на двѣ параллельныя составляющія, направленныя въ разныя стороны:

1) когда задана вполнѣ одна составляющая, или большая, чѣмъ сила R, или направленная въ противоположную сторону;

2) когда заданы точки приложенія составляющихъ, лежащія по одну сторону данной силы.

Пусть x_1 и y_1 будутъ координаты точки A ; x_2 и y_2 координаты точки B ; точка C дѣлитъ разстояніе AB на части, обратно пропорціональныя силамъ P и Q ; поэтому, пользуясь формулами аналитической геометріи для координатъ точки, дѣлящей данный отрѣзокъ въ данномъ отношеніи съ внѣшней стороны, мы получимъ для координатъ x_c и y_c точки C слѣдующія выраженія:

$$x_c = \frac{P.x_1 - Q.x_2}{P - Q}\ ,$$

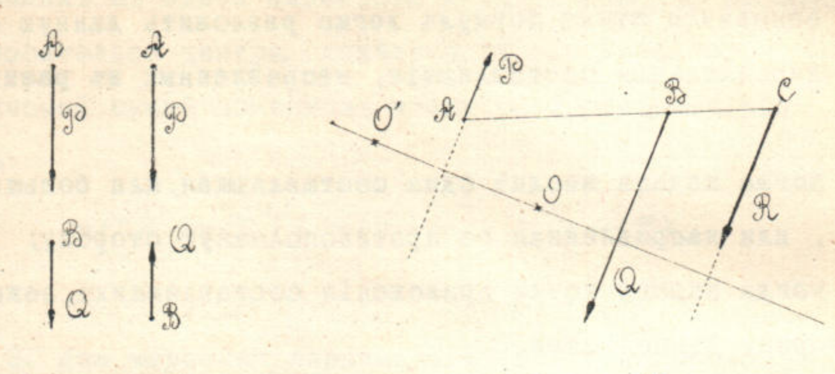
$$y_c = \frac{P.y_1 - Q.y_2}{P - Q}\ .$$

Точка C называется *центромъ* параллельныхъ силъ P и Q ; при поворотѣ силъ P и Q на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ точекъ A и B равнодѣйствующая ихъ R повернется на тотъ же уголъ вокругъ точки C.

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что опредѣленіе центра параллельныхъ силъ и полученныя выраженія его координатъ x_c , y_c въ §§

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. МЕЩЕРСКІЙ.
Изданіе Кассы Взаимопомощи Студ. СПБ. Политехн. Института.
Типо-литографія И. Трофимова. СПБ. Можайская, 3.
Корректоръ А. Сабанѣевъ. Листъ 3.

1 и 3, имѣютъ мѣсто и тогда, когда силы P и Q направлены по одной прямой (черт. 25), такъ какъ послѣднiй случай можно разсматривать, какъ частный случай одного изъ предыдущихъ.



Чертехъ 25. Чертехъ 26.

ТЕОРЕМА. Моментъ равнодѣйствующей двухъ неравныхъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны, относительно какого либо центра, лежащаго въ ихъ плоскости, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра.

Доказательство (черт. 26) подобно тому, которое изложено въ § 1.

§ 4. *Пара силъ.*

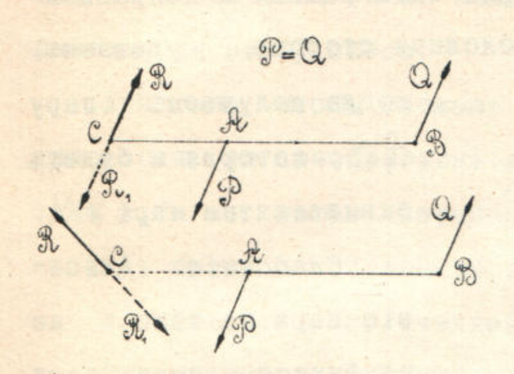
ТЕОРЕМА. Двѣ равныя параллельныя силы, направленныя въ противоположныя стороны, не имѣютъ равнодѣйствующей въ ихъ плоскости.

Доказательство. Предполагаемъ, что равнодѣйствующая R существуетъ; тогда существуетъ и сила уравновѣшивающая R_1, равная и противоположная R; между тѣмъ будетъ ли эта сила параллельна или непараллельна даннымъ силамъ P и Q (черт. 27) нетрудно видѣть, что равновѣсiе на основанiи принципа второго невозможно, и, слѣдовательно, предположенiе невѣрно.

Система двухъ равныхъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ противоположныя стороны, называется парою силъ.

Разстояніе между линіями дѣйствія силъ пары, считаемое по перпендикуляру къ нимъ, называется *плечомъ пары.*

Точки приложенія силъ пары всегда можемъ перенести такъ, что прямая, соединяющая эти точки, будетъ перпендикулярна къ силамъ.



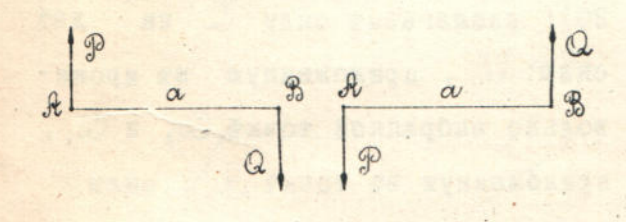
Чертежъ 27.

Теорема. *Алгебраическая сумма моментовъ силъ пары относительно какого либо центра, лежащаго въ плоскости пары, равна произведенію величины одной изъ силъ пары на плечо, взятому со знакомъ плюсъ, когда пара стремится вращать плоскость чертежа по часовой стрѣлкѣ, и со знакомъ минусъ - въ противоположномъ случаѣ.*

$$m(P)+m(Q)=P.a$$ (черт. 28, лѣвый)

$$m(P)+m(Q)=-P.a$$ (черт. 28, правый).

Доказательство такое же, какъ въ §§ 1 и 3.



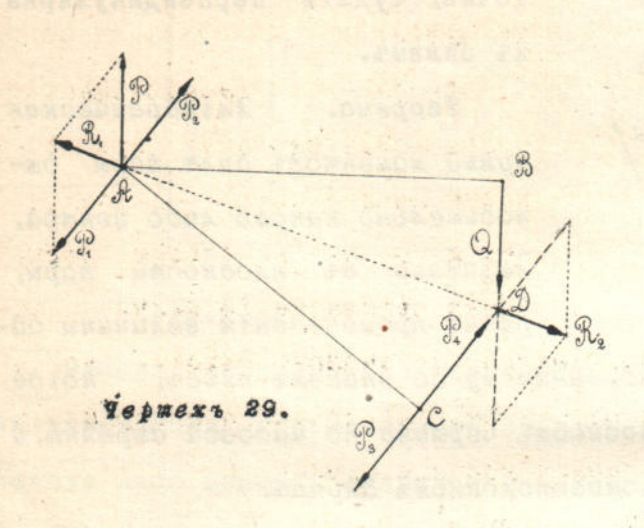
Чертежъ 28.

Произведеніе одной изъ силъ пары на плечо, взятое со знакомъ +, когда пара стремится вращать плоскость чертежа по часовой стрѣлкѣ, и со знакомъ −, въ противоположномъ случаѣ, называется *моментомъ пары,* и предыдущая теорема можетъ быть выражена такъ: *алгебраическая сумма моментовъ силъ пары относительно какого либо центра, лежащаго въ плоскости, равна моменту пары.*

ТЕОРЕМА. *Дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если плечо пары повернемъ въ ея плоскости на нѣкоторый уголъ вокругъ одного изъ концовъ.*

Доказательство. Даны силы $P=Q$ и AB плечо пары (черт. 29).

Пусть AC - новое положеніе плеча; присоединяемъ къ двумъ даннымъ силамъ P и Q четыре равныя имъ силы: P_1, P_2, P_3, P_4; затѣмъ силу R_1, равнодѣйствующую силъ P и P_1, и силу R_2, равнодѣйствующую силъ Q и P_4, какъ силы равныя и направленныя по одной прямой*) въ противоположныя стороны, удаляемъ; тогда получаемъ пару P_2P_3, которая и будетъ эквивалентна парѣ PQ.

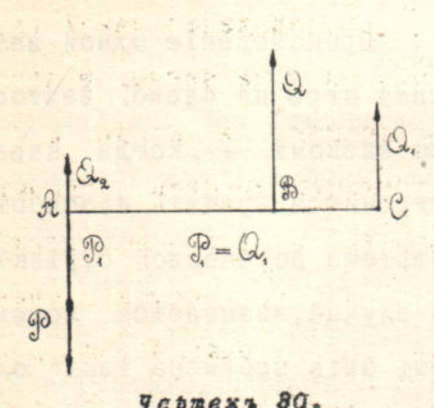


Чертежъ 29.

Слѣдствіе. Дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если пару перенести въ какое угодно положеніе въ ея плоскости.

ТЕОРЕМА. Дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если измѣнить величины силъ и длину плеча такимъ образомъ, чтобы моментъ пары сохранилъ свою величину и знакъ.

Доказательство. Даны силы $P = Q$ и AB плечо пары (черт. 30); разлагаемъ силу Q на двѣ силы: Q_1, приложенную въ произвольно выбранной точкѣ C, и Q_2, приложенную въ точкѣ A; силы P и Q_2 замѣняемъ ихъ равнодѣйствующей P_1; получаемъ пару $P_1 - Q_1$, эквивалентную данной парѣ; при этомъ имѣемъ:



Чертежъ 30.

---

*) *Прямая AD есть биссектриса угловъ BAC и BDC; по продолженіи она дѣлитъ пополамъ углы ромбовъ, имѣющіе вершины въ точкахъ A и D и, слѣдовательно, совпадаетъ съ линіями дѣйствія силъ R_1 и R_2.*

$$P.AB = P_1.AC.$$

Слѣдствіе изъ двухъ предыдущихъ теоремъ: *всѣ пары, лежащія въ одной плоскости, имѣющія одинъ и тотъ же моментъ, эквивалентны между собою.*

Для того, чтобы *сложить* нѣсколько паръ, лежащихъ въ одной плоскости, мы преобразуемъ ихъ такъ, чтобы длина плеча была одна и та же; затѣмъ перенесемъ такъ, чтобы плечи совпали, и сложимъ силы, направленныя по одной прямой.

Моментъ пары, полученной отъ сложенія нѣсколькихъ паръ, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ слагаемыхъ паръ.

Пусть даны пары силъ, изображенныя на чертежѣ 31.

Возьмемъ плечи, равныя b; соотвѣтствующія силы будутъ:

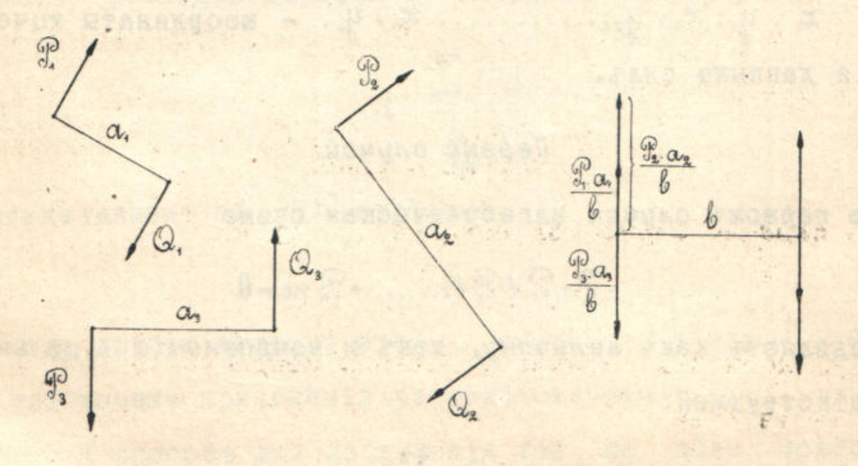
$$\frac{P_1 a_1}{b}, \frac{P_2 a_2}{b}, \frac{P_3 a_3}{b}.$$

Сила пары, полученной отъ сложенія, будетъ равна

$$\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3}{b},$$

а плечо ея равно b; моментъ этой пары равенъ, слѣдовательно,

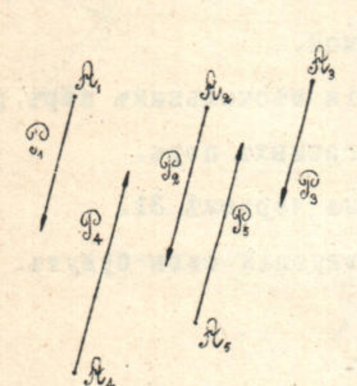
$$P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3.$$



Чертежъ 31.

§ 5. *Какое угодно число параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости и направленныхъ въ разныя стороны (черт. 32).*

Находимъ двѣ равнодѣйствующія: R_1 для силъ, направленныхъ въ одну сторону, и R_2 для силъ, направленныхъ въ сторону противоположную; при этомъ могутъ представиться *три случая.*



Чертежъ 32.

Первый случай: R_1 и R_2 *различны по величинѣ; складывая ихъ, получимъ равнодѣйствующую* R всѣхъ данныхъ силъ;

Второй случай: R_1 и R_2 *равны по величинѣ* и направлены по двумъ параллельнымъ прямымъ - получается *пара силъ;*

Третій случай: R_1 и R_2 *равны по величинѣ* и направлены по одной прямой; данныя силы находятся въ *равновѣсіи.*

Пусть $P_1, P_2, \ldots P_n$ величины данныхъ силъ, взятыя со знакомъ плюсъ, когда онѣ направлены въ одну сторону, и со знакомъ минусъ, когда онѣ направлены въ сторону противоположную; пусть $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots\ldots x_n, y_n$, - координаты точекъ приложенія данныхъ силъ.

Первый случай.

Въ первомъ случаѣ алгебраическая сумма

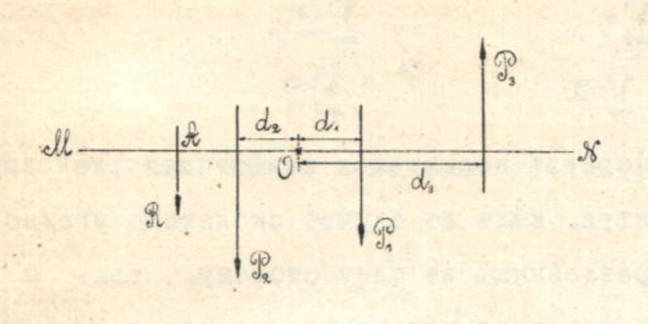
$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_n \text{ не} = 0$$

и опредѣляетъ какъ *величину,* такъ и *направленіе* (по знаку) равнодѣйствующей:

$$R_1 = \sum_{i=1}^{i=n} P_i .$$

Линію дѣйствія равнодѣйствующей находимъ, пользуясь тѣмъ, что ея моментъ равенъ алгебраической суммѣ моментовъ данныхъ силъ.

Возьмемъ гдѣ-либо въ плоскости силъ центръ моментовъ O и проведемъ черезъ него прямую MN, перпендикулярную къ направленію силъ; плечи силъ обозначимъ черезъ $d_1, d_2, \ldots\ldots d_n$, приписывая имъ знакъ $+$, когда они отсчитываются отъ центра O въ одну сторону (напримѣръ, вправо), и знакъ минусъ, когда они отсчитываются въ противоположную сторону; при этомъ будемъ считать положительными величины тѣхъ силъ, которыя, при положительномъ плечѣ, имѣютъ положительный моментъ относительно точки O такъ напримѣръ, на прилагаемомъ чертежѣ 33: величины d_1, d_3, P_1, P_2 берутся со знакомъ $+$, d_2, P_3 со знакомъ $-$. Тогда моментъ силы P_i:



Чертежъ 33.

$$m(P_i) = P_i d_i ,$$

и плечо d равнодѣйствующей R находимъ по формулѣ:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i d_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i} .$$

Откладываемъ по MN отрѣзокъ

$$OA = d$$

въ ту или другую сторону отъ O, смотря по знаку d; получимъ одну изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей.

Другой способъ для достиженія той же цѣли состоитъ въ томъ, что мы опредѣляемъ *центръ* данныхъ силъ, черезъ который линія дѣйствія должна проходить.

Координаты x_c и y_c *центра данныхъ параллельныхъ силъ* выражаются формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i}\ , \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i}\ .$$

Для *вывода* этихъ формулъ пользуемся извѣстными уже выраженіями координатъ центра, какъ въ случаѣ сколькихъ угодно параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, такъ и въ случаѣ двухъ неравныхъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны.

Второй случай.

Во *второмъ* случаѣ, когда данныя силы приводятся къ парѣ, *алгебраическая сумма*

$$P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0\ .$$

Моментъ пары равенъ алгебраической суммѣ моментовъ данныхъ силъ, слѣдовательно, эта сумма не равна нулю.

$$\text{Моментъ пары} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i d_i\ .$$

Обозначимъ черезъ α уголъ, составленный съ положительной осью OX направленіемъ одной изъ данныхъ силъ, величинѣ которой приписанъ знакъ плюсъ; тогда проекціи данныхъ силъ будутъ:

$$X_1 = P_1 \cos\alpha\ ,$$
$$Y_1 = P_1 \sin\alpha\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = P_n \cos\alpha\ ,$$
$$Y_n = P_n \sin\alpha\ .$$

поэтому моменты ихъ относительно начала координатъ:

$$m(P_1) = P_1 y_1 \cos\alpha_1 - P_1 x_1 \sin\alpha_1 \ ,$$

....

$$m(P_n) = P_n y_n \cos\alpha_n - P_n x_n \sin\alpha_n \ ;$$

слѣдовательно, сумма моментовъ данныхъ силъ будетъ равна

$$\cos\alpha . \sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i - \sin\alpha . \sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i \ .$$

Это выраженіе не равно нулю и можетъ служить для опредѣленія момента равнодѣйствующей пары.

Третій случай.

Въ третьемъ случаѣ, когда данныя силы находятся *въ равновѣсіи*, алгебраическая сумма ихъ величинъ равна нулю и алгебраическая сумма ихъ моментовъ также равна нулю. Поэтому *условія*, необходимыя и достаточныя для *равновѣсія параллельныхъ силъ* въ плоскости, выражаются двумя равенствами:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i d_i = 0 \ ;$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

и

$$\cos\alpha . \sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i - \sin\alpha . \sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i = 0 \ .$$

Отсюда видно, что параллельныя силы, находящіяся въ равновѣсіи, послѣ поворота ихъ въ одну сторону на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ точекъ приложенія, вообще говоря, въ равновѣсіи не останутся.

Для того, чтобы онѣ остались въ равновѣсіи при всякой ве-

личинѣ угла поворота, а, слѣдовательно, при всякой величинѣ угла α, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i = 0. \quad *)$$

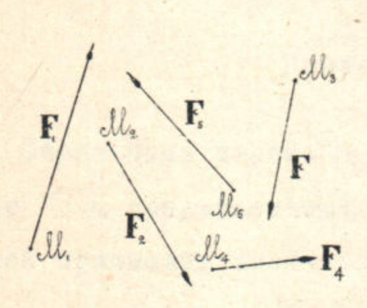
Если указанныя три условія выполнены, равновѣсіе называется *астатическимъ*.

ГЛАВА V.

КАКІЯ УГОДНО СИЛЫ ВЪ ПЛОСКОСТИ.

§ 1. *Сложеніе какихъ угодно силъ въ плоскости.*

Пусть къ тѣлу приложены n силъ, направленныхъ какъ угодно въ одной плоскости (черт.34).



Чертежъ 34.

Мы складываемъ первую силу со второй, равнодѣйствующую ихъ съ третьей силой, найденную равнодѣйствующую съ четвертой и т.д., примѣняя или правило параллелограмма или правила сложенія двухъ параллельныхъ силъ.

Такимъ образомъ мы найдемъ равнодѣйствующую данныхъ силъ, если только не встрѣтимся съ однимъ изъ слѣдующихъ двухъ случаевъ.

---

*) *Второе изъ этихъ равенствъ находимъ, полагая* $\alpha=\frac{\pi}{2}$, *третье, полагая* $\alpha=0$.

Первый случай: найдена равнодѣйствующая R_k для k силъ, причемъ $k < n-1$, и оставшіяся $n-k$ силъ:

$$F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots\ldots F_n,$$

всѣ порознь равны силѣ R_k, параллельны ей и направлены въ противоположную сторону.

Второй случай: найдена равнодѣйствующая $n-1$ силъ R_{n-1}, и послѣдняя изъ данныхъ силъ F_n равна R_{n-1} и направлена въ противоположную сторону по прямой, параллельной R_{n-1}, или по одной прямой съ R_{n-1}.

Въ первомъ случаѣ складываемъ силы F_{k+1}, $F_{k+2}, \ldots\ldots\ldots F_n$ и затѣмъ *равнодѣйствующую* ихъ съ силою R_k; получаемъ такимъ образомъ *равнодѣйствующую* всѣхъ данныхъ силъ.

Во второмъ случаѣ: если силы R_{n-1} и F_n направлены по двумъ параллельнымъ прямымъ, то мы имѣемъ *пару силъ*, эквивалентную данной системѣ; если же R_{n-1} и F_n направлены *по одной* прямой, то данныя силы находятся *въ равновѣсіи*.

Такимъ образомъ, когда къ тѣлу приложены сколько угодно силъ, направленныхъ какъ угодно въ одной плоскости, то всѣ онѣ приводятся или къ *одной силѣ*, ихъ равнодѣйствующей, или къ *парѣ силъ*, или же находятся *въ равновѣсіи*.

Въ какомъ бы порядкѣ мы ни складывали силы, результатъ будетъ, очевидно, одинъ и тотъ же.

Изъ предыдущаго уже нетрудно вывести способы для сложенія силъ въ плоскости, какъ съ помощью *многоугольника силъ*, такъ и съ помощью *проекцій силъ*.

Первый способъ.

Строимъ *многоугольникъ силъ;* нѣкоторые углы его могутъ быть 0° или 180°, а стороны могутъ пересѣкаться.

Первый случай: многоугольникъ силъ незамкнутъ.

Силы имѣютъ *равнодѣйствующую* R; ея величина и направле-

ніе изображаются замыкающею многоугольника силъ.

Линію дѣйствія силы $\mathcal{R}$ опредѣлимъ, пользуясь тѣмъ, что моментъ равнодѣйствующей относительно какой нибудь точки равенъ алгебраической суммѣ моментовъ всѣхъ данныхъ силъ относительно той же точки.

Второй случай: многоугольникъ силъ замкнутъ.

Силы приводятся къ *парѣ* или находятся *въ равновѣсіи.*

Находимъ алгебраическую сумму моментовъ данныхъ силъ относительно какой нибудь точки; если эта сумма *не равна нулю,* то силы приводятся къ *парѣ;* если же она *равна нулю,* то данныя силы находятся *въ равновѣсіи.*

Второй способъ.

Обозначимъ координаты точекъ приложенія силъ:

$$F_1\ ,\ F_2\ ,\ F_3\ ,\ \ldots\ldots\ F_n$$

черезъ x_1 , y_1 ; x_2 , y_2 ; .... x_n , y_n ; а проекціи силъ на координатныя оси соотвѣтственно черезъ

$$X_1\ Y_1\ , X_2\ , Y_2\ , \ldots\ X_n\ , Y_n\ .$$

Первый случай. Суммы проекцій силъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i$$

не равны нулю одновременно.

Существуетъ *равнодѣйствующая* $\mathcal{R}$; проекціи ея на координатныя оси обозначимъ черезъ X и Y .

Для опредѣленія *величины и направленія* равнодѣйствующей $\mathcal{R}$ имѣемъ:

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i\ ,$$

$$Y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i\ ;$$

откуда

$$\mathcal{R} = \sqrt{X^2 + Y^2}\,,$$

$$\cos(\mathcal{R}, \mathcal{X}) = \frac{X}{\mathcal{R}}\,,$$

$$\cos(\mathcal{R}, \mathcal{Y}) = \frac{Y}{\mathcal{R}}\,.$$

Для опредѣленія *линіи дѣйствія* равнодѣйствующей $\mathcal{R}$ найдемъ одну изъ точекъ, лежащихъ на этой линіи, именно ту, которая находится на прямой, проведенной черезъ начало координатъ перпендикулярно къ направленію силы $\mathcal{R}$; координаты искомой точки пусть будутъ x и y.

Сумму моментовъ данныхъ силъ относительно начала координатъ обозначимъ черезъ L, такъ что

$$L = \sum_{i=1}^{i=n}(X_i y_i - Y_i x_i)\,.$$

Тогда для опредѣленія x и y имѣемъ два уравненія:

$$Xy - Yx = L\,,$$

$$Xx + Yy = 0\,,$$

изъ которыхъ первое выражаетъ, что моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ, а второе - условіе вышеупомянутой перпендикулярности.

Рѣшая эти уравненія относительно x и y, находимъ:

$$x = -\frac{L.Y}{\mathcal{R}}\,,$$

$$y = \frac{L.X}{\mathcal{R}}\,.$$

Второй случай. Суммы проекцій силъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0\,.$$

но сумма моментовъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i y_i - Y_i x_i) \text{ не} = 0 .$$

Въ этомъ случаѣ силы приводятся *къ парѣ,* моментъ которой равенъ

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i y_i - Y_i x_i) .$$

Третій случай. Сумма проекцій силъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0 \; , \; \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0 \; ,$$

и сумма моментовъ силъ

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i y_i - Y_i x_i) = 0 .$$

Въ этомъ случаѣ силы находятся *въ равновѣсіи.*

Замѣтимъ, что въ двухъ послѣднихъ случаяхъ *сумма моментовъ данныхъ силъ не зависитъ отъ выбора центра моментовъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_0 и y_0 будутъ координаты центра моментовъ, тогда моментъ силы F_i будетъ:

$$X_i(y_i - y_0) - Y_i(x_i - x_0) \; ,$$

а потому сумма моментовъ

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[X_i(y_i - y_0) - Y_i(x_i - x\;)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}(X_i y_i - Y_i x_i) - y_0 \sum_{i=1} X_i + x_0 \sum_{i=1} Y_i \; .$$

откуда слѣдуетъ, что въ случаяхъ второмъ и третьемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[X_i(y_i - y_0) - Y_i(x_i - x_0)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}(X_i y_i - Y_i x_i) \; .$$

ГЛАВА VI.

ГРАФИЧЕСКАЯ СТАТИКА.

Предметъ графической статики составляетъ рѣшеніе вопросовъ о равновѣсіи посредствомъ *чертежа*.

Построенія, указанныя въ предыдущихъ главахъ, относятся уже къ графической статикѣ.

Основныя построенія графической статики суть *многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ*.

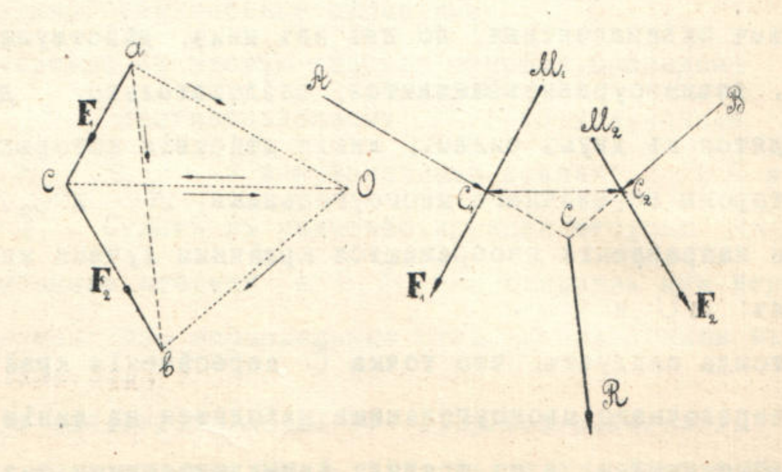
§ 1. *Сложеніе двухъ силъ.*

Первый случай: двѣ непараллельныя силы F_1, F_2, приложенныя въ точкахъ M_1 и M_2 (черт. 35);

$$F_1 = ac,$$

$$F_2 = cb;$$

M_1F_1 и M_2F_2 - линіи дѣйствія.



Чертежъ 35.

Построеніе. Строимъ многоугольникъ силъ acb, его замыкающую ab, и изъ произвольно выбранной точки O проводимъ линіи Oa, Ob, Oc; точка O называется *полюсомъ,* а линіи Oa, Ob, Oc - *лучами* многоугольника силъ.

Проводимъ затѣмъ изъ произвольно выбранной точки A прямую $AC_1 \| Oa$ до пересѣченія съ линіей дѣйствія силы F_1 въ точкѣ C_1, изъ точки C_1 прямую $C_1C_2 \| Oc$ до пересѣченія съ линіей дѣйствія силы F_2 въ точкѣ C_2 и, наконецъ, $C_2B \| Ob$; многоугольникъ AC_1C_2B называется *веревочнымъ многоугольникомъ* для данной системы силъ F_1 и F_2.

Продолжаемъ крайнія стороны веревочнаго многоугольника AC_1 и C_2B до пересѣченія въ точкѣ C, - эта точка есть одна изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей силъ F_1 и F_2.

Прямая $CR \| ab$ будетъ линіей дѣйствія равнодѣйствующей, а величина и направленіе ея изображаются замыкающею ab.

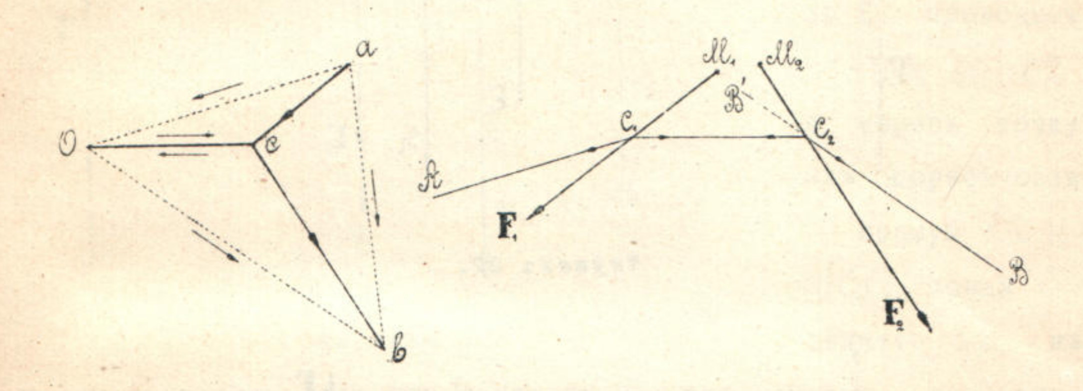
Доказательство. Точки приложенія силъ F_1 и F_2 переносимъ въ точки C_1 и C_2; затѣмъ силу F_1, разлагаемъ на двѣ составляющія по линіямъ AC_1 и C_1C_2: величины и направленія ихъ изображаются лучами aO и Oc: силу F_2 разлагаемъ на двѣ составляющія по линіямъ C_1C_2 и C_2B: величины и направленія ихъ изображаются лучами cO и Ob.

Такимъ образомъ, вмѣсто двухъ данныхъ силъ, получаемъ четыре имъ эквивалентныя, но двѣ изъ нихъ, дѣйствующія по линіи C_1C_2, взаимноуравновѣшиваются; слѣдовательно, данныя силы приводятся къ двумъ силамъ, линіи дѣйствія которыхъ суть крайнія стороны веревочнаго многоугольника: AC_1 и C_2B, а величины и направленія изображаются крайними лучами многоугольника силъ: aO и Ob.

Отсюда слѣдуетъ, что точка C пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника находится на линіи дѣйствія равнодѣйствующей, а по правилу параллелограмма силъ находимъ, что величина и направленіе равнодѣйствующей изображается за-

мыкающею ab.

Примѣчаніе. Многоугольникъ AC_1C_2B называется *веревочнымъ* на слѣдующемъ основаніи: если каждую изъ сторонъ AC_1, C_1C_2, C_2B сдѣлать изъ *веревки* (нитки или цѣпи) и соединить ихъ узлами или шарнирами C_1 и C_2, то такой многоугольникъ при дѣйствіи силъ F_1 и F_2, приложенныхъ въ точкахъ C_1 и C_2, будетъ въ равновѣсіи, если закрѣпить крайнія точки A и B.



Чертежъ 36.

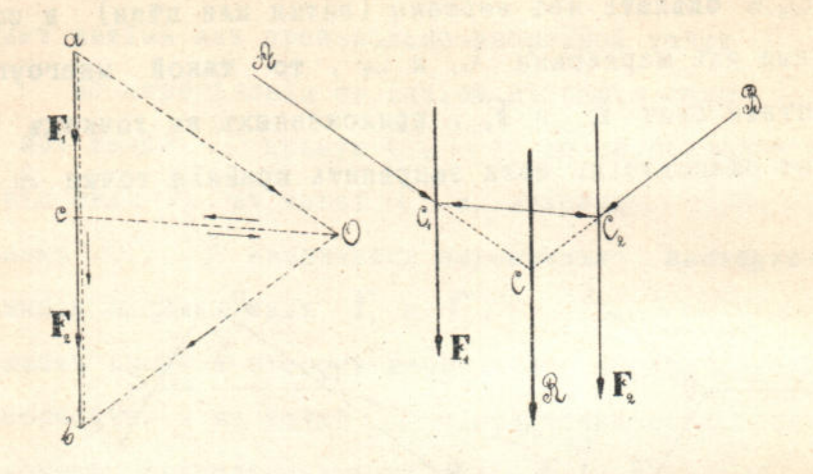
Замѣтимъ, что при другомъ положеніи полюса O, какъ изображено на чертежѣ 36, многоугольникъ AC_1C_2B съ закрѣпленными концами A и B, при дѣйствіи силъ F_1 и F_2, будетъ въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, если стороны его будутъ *несгибаемые стержни,* соединенные шарнирами.

Если на чертежѣ 36 вторую крайнюю сторону проведемъ въ направленіи C_2B', противоположномъ C_2B, то полученный многоугольникъ AC_1C_2B', при закрѣпленныхъ концахъ A и B и при силахъ F_1 и F_2, будетъ въ равновѣсіи, если стороны AC_1 и C_1C_2 - несгибаемые стержни, а C_2B' или стержень или веревка.

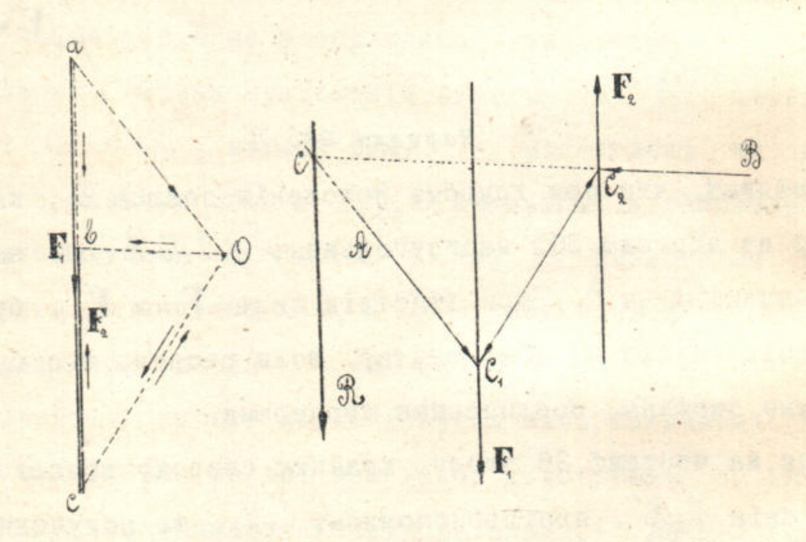
Второй случай: двѣ параллельныя силы, направленныя въ од-

ну сторону (черт. 37) и въ *разныя* стороны (чертежъ 38).

Построеніе и доказательство ведутся на чертежахъ 37 и 38 такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.



Чертежъ 37.



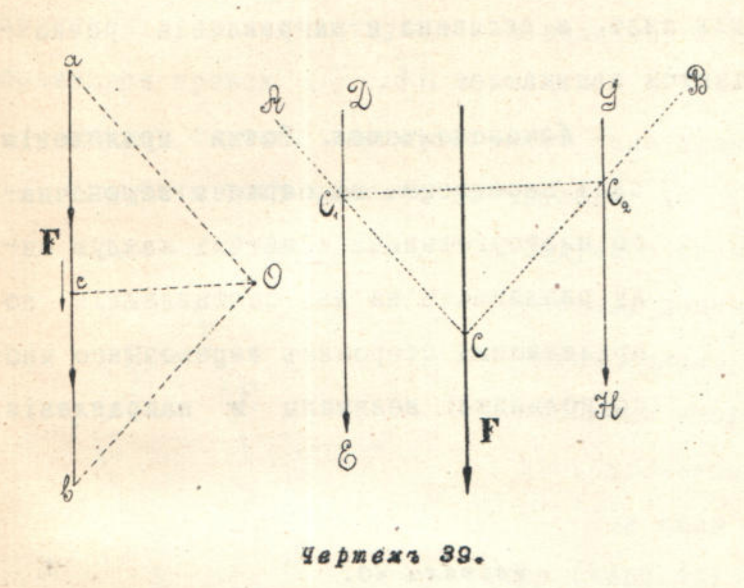
Чертежъ 38.

§ 2.

Разложеніе данной силы на двѣ составляющія мы можемъ произвести, имѣя въ виду вышеуказанныя построенія.

Какъ *примѣръ*, разложимъ данную силу F (чертежъ 39) на двѣ составляющія, ей параллельныя, линіи дѣйствія которыхъ $\mathcal{DE}$ и $\mathcal{GH}$ заданы.

На линіи дѣйствія данной силы **F** беремъ произвольно выбранную точку C и проводимъ черезъ нее какія нибудь прямыя: CA и CB, пересѣкающія данныя линіи DE и GH; точки пересѣченія C_1 и C_2 соединяемъ прямой C_1C_2.



Чертежъ 39.

Пусть ab изображаетъ величину и направленіе данной силы **F**; проводимъ $aO \parallel CA$, $bO \parallel CB$ и черезъ точку ихъ пересѣченія O прямую $OC \parallel C_1C_2$; точка C дѣлитъ ab на части, которыя, какъ это очевидно изъ предыдущаго, изображаютъ величины и направленія искомыхъ составляющихъ силъ: ac по DE и cb по GH.

§ 3. *Сложеніе скольких угодно силъ, направленныхъ какъ угодно въ одной плоскости.*

Первый случай: многоугольникъ силъ не замкнутъ.

Пусть даны силы: F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, приложенныя къ тѣлу въ точкахъ M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, и $acdefb$ многоугольникъ этихъ силъ (черт. 40).

Построеніе. Произвольно выбранную точку O принимаемъ за *полюсъ* и проводимъ изъ нея *лучи:* Oa, Oc, Oe, Od, Of, Ob; проведемъ затѣмъ: $AC_1 \parallel Oa$, $C_1C_2 \parallel Oc$, $C_2C_3 \parallel Od$, $C_3C_4 \parallel Oe$, $C_4C_5 \parallel Of$, $C_5B \parallel Ob$.

Многоугольникъ $AC_1C_2C_3C_4C_5B$ называется *веревочнымъ многоугольникомъ* для данной системы силъ при полюсѣ O.*)

*) *Вслѣдствіе того, что выборъ точекъ O и A находится въ*

Продолжаемъ крайнія стороны AC_1 и C_5B до пересѣченія ихъ въ точкѣ C.

Прямая CD, проведенная черезъ точку C параллельно замыкающей многоугольника силъ ab, будетъ линіей дѣйствія равнодѣйствующей данныхъ силъ, а величина и направленіе равнодѣйствующей изображаются замыкающею ab.

Доказательство. Точки приложенія силъ переносимъ въ вершины веревочнаго многоугольника и затѣмъ каждую силу разлагаемъ на двѣ составляющія по прилежащимъ сторонамъ веревочнаго многоугольника; величины и направленія



Чертежъ 40.

этихъ составляющихъ изображаются параллельными имъ лучами.

Исключая силы взаимноуравновѣшивающіяся, мы *приводимъ данную систему силъ къ двумъ силамъ, линіи дѣйствія*

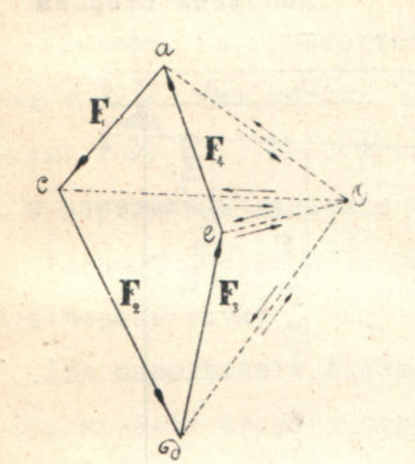
нашемъ распоряженіи, для каждой системы силъ существуетъ безчисленное множество веревочныхъ многоугольниковъ.

которыхъ суть крайнія стороны веревочнаго многоугольника AC_1 *и* C_5B *, а величины и направленія изображаются крайними лучами:* aO *и* Ob .

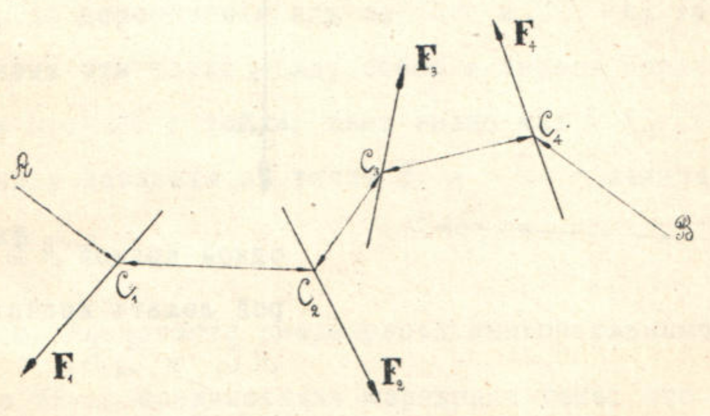
Отсюда уже слѣдуетъ, что точка C есть одна изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей, а величина и направленіе ея изображаются прямою ab.

Второй случай: многоугольникъ силъ замкнутъ.

Примѣняя тотъ способъ построенія, который указанъ для предъидущаго случая, мы приводимъ систему данныхъ силъ также къ *двумъ силамъ, направленнымъ по крайнимъ сторонамъ веревочнаго многоугольника.*



Эти силы или составляютъ *пару* (черт.41) или *взаимноуравновѣшиваются* (черт.42).

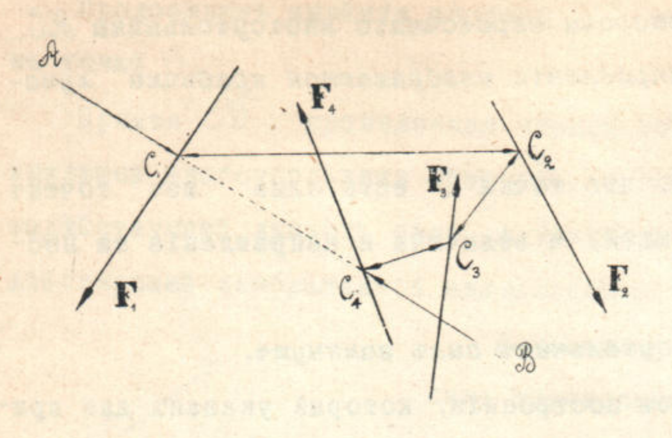


Чертежъ 41.

Многоугольникъ силъ $acdea$ общій для чертежей 41 и 42.

Но чертежъ 41 силы F_1 , F_2 , F_3 , F_4 приводятся къ *парѣ силъ:* одна изъ нихъ направлена по AC_1 , другая по C_4B.

Величина силы изображается лучемъ Oa .



Чертежъ 42.

Чертежъ 43.

На черт.42 силы F_1, F_2, F_3, F_4 находятся въ *равновѣсіи:* онѣ приводятся къ двумъ силамъ, равнымъ по величинѣ лучу OA и направленнымъ въ противоположныя стороны по одной прямой AB, на которой лежатъ крайнія стороны AC_1 и C_4B.

§ 4.

Сложеніе параллельныхъ силъ.

Для сложенія силъ параллельныхъ примѣняется вышеуказанное построеніе: многоугольникъ силъ (съ лучами) и

веревочный многоугольникъ; но въ этомъ случаѣ углы многоугольника силъ равны 180° или 0°, а потому мы откладываемъ по одной прямой послѣдовательно сначала величины всѣхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, а затѣмъ въ обратномъ направленіи величины силъ, направленныхъ въ сторону противоположную;- для большей ясности чертежа, вмѣсто одной упомянутой прямой, проводимъ иногда двѣ параллельныя прямыя рядомъ; какъ на той, такъ и на другой прямой откладываютъ величины только тѣхъ силъ, которыя направлены въ одну сторону.

Примѣръ. На горизонтальной балкѣ, лежащей на двухъ опорахъ K и L, въ точкахъ M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 помѣщены грузы: F_1, F_2, F_3, F_4, F_5; найдемъ ихъ равнодѣйствующую R и опредѣлимъ давленіе балки на опоры (черт.43).

Равнодѣйствующая R равна ab и линія дѣйствія ея проходитъ черезъ точку C.

Для опредѣленія *давленій*, направленныхъ по линіямъ KN и LP, крайнія стороны веревочнаго многоугольника AC_1 и C_5B продолжаемъ до пересѣченія ихъ съ KN и LP въ точкахъ D и E; соединяемъ эти точки между собою и черезъ полюсъ O проводимъ прямую $O\alpha \parallel DE$; тогда, какъ видно изъ § 2, $a\alpha$ изображаетъ величину давленія въ точкѣ K и αb - величину давленія въ точкѣ L.

§ 5. *Равновѣсіе стержневого многоугольника.*

Система тѣлъ, соединенныхъ шарнирами такъ, что каждый шарниръ соединяетъ только два тѣла, называется *стержневымъ многоугольникомъ,* потому что эти тѣла или на самомъ дѣлѣ стержни, или могутъ быть разсматриваемы какъ стержни.

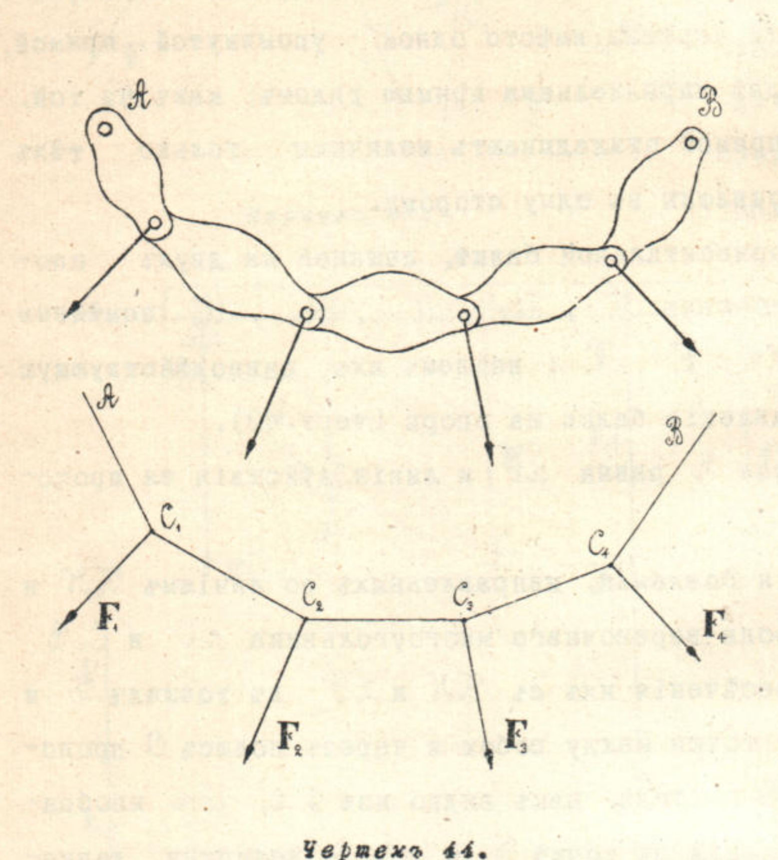
Предполагаемъ:

1) Оси шарнировъ параллельны между собою.

2) Данныя силы приложены только къ осямъ шарнировъ и на-

правлены въ одной плоскости, перпендикулярной къ направленію осей (черт. 44).

Въ этой плоскости мы и будемъ вести рѣшеніе вопроса о равновѣсіи стержневого многоугольника, предполагая, что крайнія его точки закрѣплены.



Чертежъ 44.

"Направленіемъ стержня" мы называемъ направленіе прямой, соединяющей оси двухъ шарнировъ, находящихся на концахъ стержня; для крайняго стержня одинъ изъ шарнировъ замѣняется закрѣпленною точкою.

На каждый стержень дѣйствуютъ только двѣ силы, именно: реакція осей двухъ шарнировъ для промежуточнаго стержня; реакція оси одного шарнира и реакція закрѣпленной точки для крайняго стержня.

На ось каждаго шарнира дѣйствуютъ три силы: данная сила и реакціи двухъ сосѣднихъ стержней; - по принципу 6-му эти реакціи равны и противоположны реакціямъ оси шарнира на сосѣдніе стержни.

Для равновѣсія стержневого многоугольника, очевидно, необходимы и достаточны два условія:

1) каждая изъ данныхъ силъ должна уравновѣшиваться реак-

ціями двухъ сосѣднихъ стержней;

2) каждыя двѣ реакціи, приложенныя къ одному стержню должны быть равны и направлены по одной прямой въ противоположныя стороны.

Изъ этихъ условій заключаемъ, что составляющія данной силы по направленіямъ двухъ сосѣднихъ стержней и будутъ реакціи оси шарнира на эти стержни; замѣтивъ, что реакціи осей крайнихъ шарнировъ на крайніе стержни уравновѣшиваются реакціями закрѣпленныхъ точекъ, мы, на основаніи условія 2-го, получаемъ слѣдующее необходимое и достаточное *условіе равновѣсія стержневого многоугольника:*

послѣ того, какъ каждая изъ данныхъ силъ будетъ разложена по направленіямъ двухъ сосѣднихъ стержней, каждыя двѣ составляющія, направленныя по одному и тому же промежуточному стержню, должны быть равны и противоположны.

Изъ предидущаго мы знаемъ, что, если стержневой многоугольникъ $AC_1C_2C_3C_4B$ представляетъ одинъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ для данной системы силъ F_1, F_2, F_3, F_4, то указанныя условія выполнены; *докажемъ,* что оно выполняется *только* въ этомъ случаѣ, т.е. *только* тогда, когда стороны AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4B соотвѣтственно параллельны лучамъ многоугольника силъ Oa. Oc, Od, Oe, Ob, (черт.45).

Разлагаемъ каждую изъ силъ: F_1, F_2, F_3, F_4 на двѣ составляющія по направленіямъ сосѣднихъ стержней; для этого строимъ треугольники (черт.46):

$$a_1b_1O_1\text{, гдѣ } a_1b_1 \# F_1\text{, } a_1O_1 \# AC_1\text{, } b_1O_1 \# C_1C_2;$$

$$a_2b_2O_2\text{, гдѣ } a_2b_2 \# F_2\text{. } a_2O_2 \# C_1C_2\text{, } b_2O_2 \# C_2C_3;$$

$$a_3b_3O_3,$$

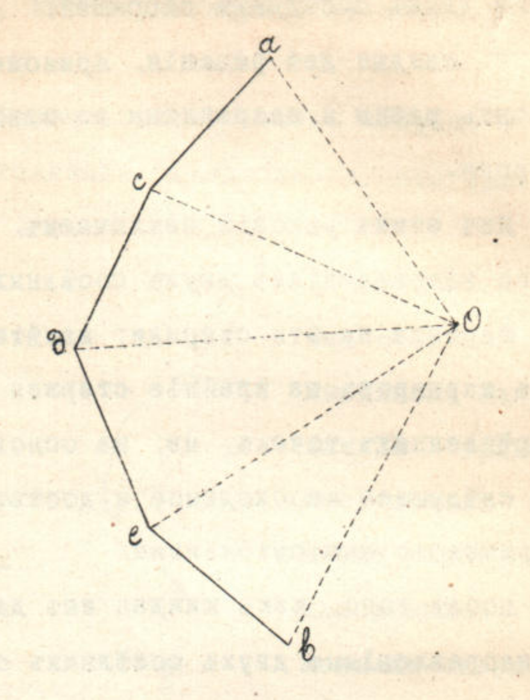
$$a_4b_4O_4;$$

причемъ должно быть

$$b_1O_1 = a_2O_2 ,$$

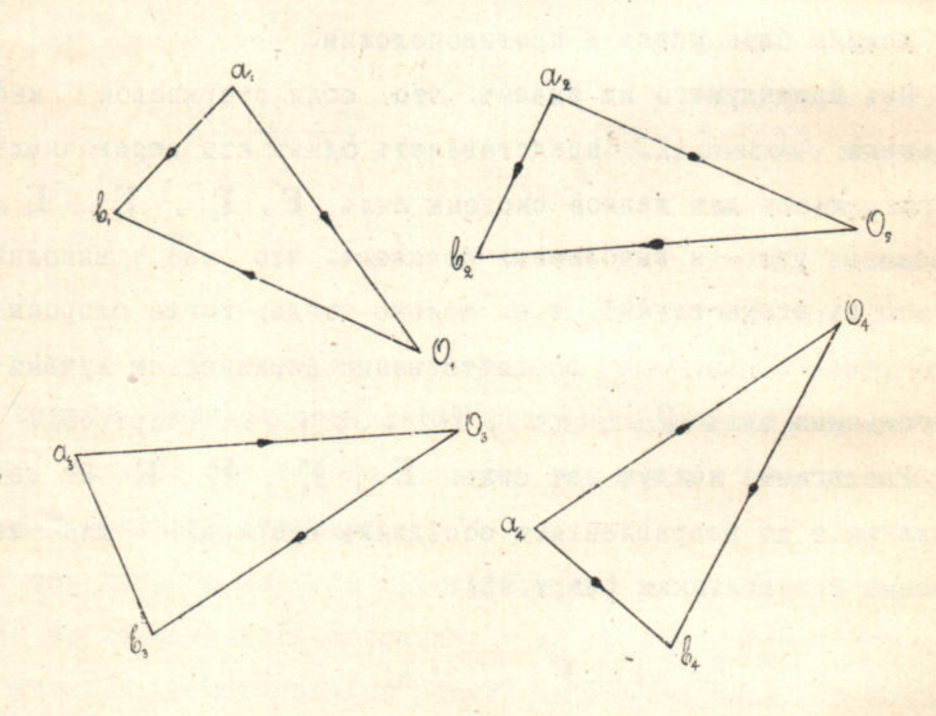
$$b_2O_2 = a_3O_3 ,$$

$$b_3O_3 = a_4O_4 ;$$



соединяя построенные треугольники такъ, чтобы равныя стороны совпали, мы и получимъ чертежъ 45, который называется *многоугольникомъ Вариньона*.

Чертежъ 45.



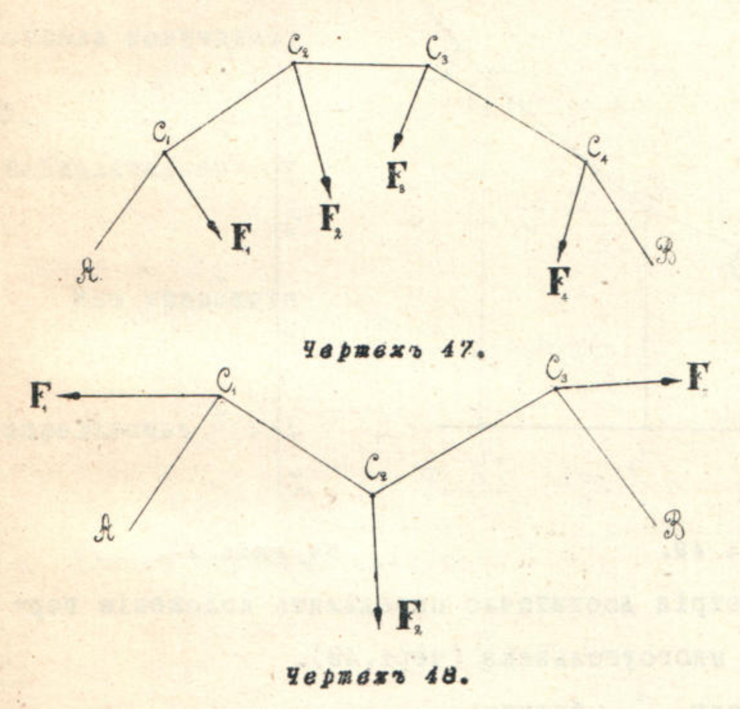
Чертежъ 46.

Приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему заключенію:

Для равновѣсія стержневого многоугольника необходимо и достаточно, чтобы онъ представлялъ одинъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ для данныхъ силъ.

Каждый изъ стержней многоугольника въ положеніи равновѣсія или *растягивается* или *сжимается;* на чертежѣ 44 всѣ стержни растягиваются; на чертежѣ 47 всѣ стержни сжимаются; на чертежѣ 48 одни стержни растягиваются, другіе сжимаются.

Лучъ многоугольника силъ, параллельный данному стержню, изображаетъ величину и направленіе того усилія, которое растягиваетъ или сжимаетъ этотъ стержень.



Чертежъ 47.

Чертежъ 48.

Замѣтимъ, что каждый изъ растягиваемыхъ стержней можно замѣнить нитью, веревкою или цѣпью.

Задача: найти форму стержневого многоугольника въ положеніи равновѣсія - будетъ *опредѣленною*, если, напримѣръ, даны величины и направленія силъ и длины стержней, или если даны линіи дѣйствія силъ, направленіе крайнихъ стержней и длина одного промежуточнаго стержня.

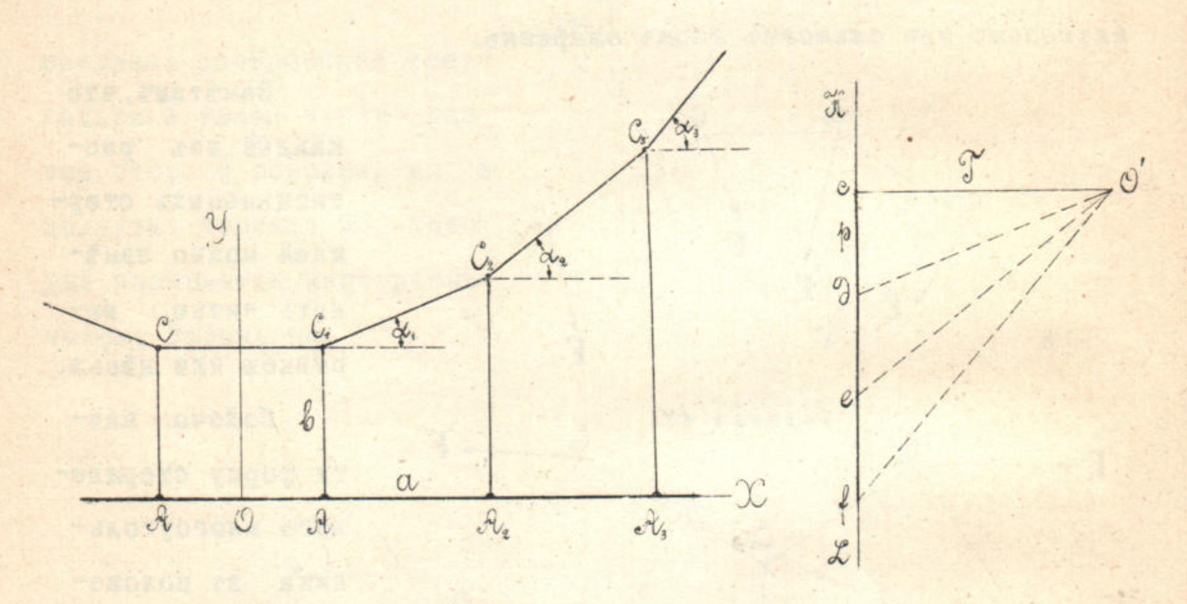
Примѣчаніе. Если крайнія точки стержневого многоугольника *не закрѣплены,* то въ положеніи равновѣсія къ нимъ должны быть приложены силы, соотвѣтственно равныя и противоположныя тѣмъ реакціямъ, которыя крайніе стержни испытываютъ со стороны шарнировъ.

Примѣръ. Опредѣлить форму равновѣсія стержневого многоугольника, поддерживающаго висячій мостъ.

При этомъ предполагается:

1) многоугольникъ симметриченъ относительно средины моста и среднiй стержень горизонталенъ;

2) вертикальныя тяги, поддерживающiя помостъ, находятся на равномъ разстоянiи a другъ отъ друга и одинаково нагружены вѣсомъ p ; число тягъ $2n$, высота двухъ среднихъ тягъ b , высота крайнихъ тягъ или соотвѣтствующихъ береговыхъ устоевъ h.



Чертежъ 49. Чертежъ 50.

Вслѣдствiе симметрiи достаточно опредѣлить положенiе вершинъ одной половины многоугольника (черт.49).

Координаты вершины C_k будутъ:

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)a\,,$$

$$y_k = b + a(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots\ldots + \operatorname{tg}\alpha_{k-1})\,,$$

гдѣ $\alpha_i\,(i=1,2,3,\ldots\ldots n)$ уголъ, составляемый стороною C_iC_{i+1} съ горизонтомъ.

Пусть $T = O'c$ (черт.50) будетъ усилiе, растягивающее среднiй стержень CC_1 ; тогда, отложивши на прямой KL, перпендикулярной къ направленiю $O'c$, длины .

$$cd = de = \ldots\ldots = p\,.$$

и проведя лучи: $O\partial$, $O'e$, $O'f$ ....получимъ многоугольникъ Вариньона и будемъ имѣть

$$CC_1 \| O'c ,$$
$$C_1C_2 \| O\partial ,$$
$$C_2C_3 \| O'e ,$$
$$C_3C_4 \| O'f ,$$
....

отсюда получаемъ

$$tg\,\alpha_i = \frac{ip}{T} ,$$

слѣдовательно:

$$y_k = b + \frac{ap}{T} \cdot \frac{k(k-1)}{2} .$$

Изъ уравненія

$$h = b + \frac{ap}{T} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

опредѣляемъ T :

$$T = \frac{ap}{h-b} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1).a ,$$

$$y_k = b + \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot (h-b) .$$

Нетрудно показать, что вершины многоугольника лежатъ на параболѣ; исключая число k изъ двухъ предыдущихъ уравненій, мы получимъ уравненіе кривой второго порядка, именно, параболы.

Усиліе, растягивающее стержень C_iC_{i+1} , равно

$$\sqrt{T^2 + i^2p^2} .$$

СТАТИКА ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

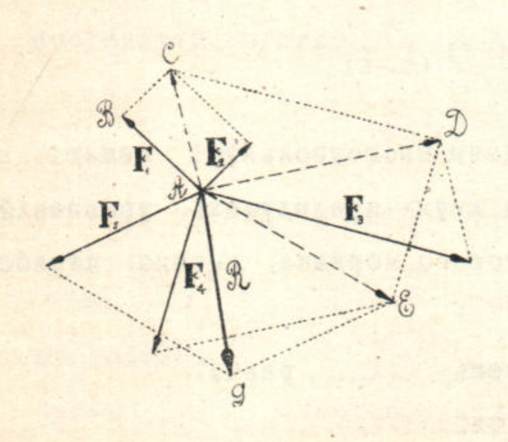
Переходимъ къ разсмотрѣнію вопросовъ о сложеніи, разложеніи и равновѣсіи силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу въ *пространствѣ*.

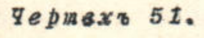
ГЛАВА VII.

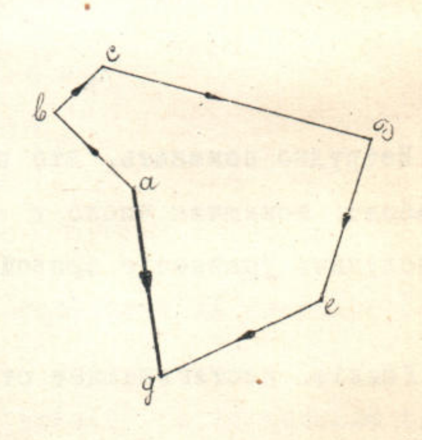
СИЛЫ, ЛИНІИ ДѢЙСТВІЯ КОТОРЫХЪ ПЕРЕСѢКАЮТСЯ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

§ 1. *Силы, приложенныя въ одной точкѣ.*

Примѣняя послѣдовательно правило параллелограмма, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: *равнодѣйствующая* изображается по величинѣ и направленію замыкающею многоугольника, стороны котораго изображаютъ по величинѣ и направленію данныя силы.




Чертежъ 51.



Чертежъ 52.

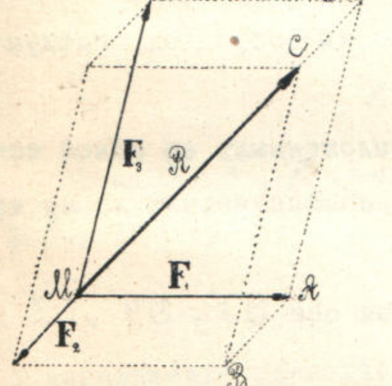
Этотъ *многоугольникъ* называется *многоугольникомъ силъ;* для силъ: F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_5 , многоугольникъ силъ будетъ ABCDEG (черт.51) или на отдѣльномъ чертежѣ abcdeg (чер-

тежъ 52).

Слѣдуетъ имѣть въ виду, что въ настоящемъ случаѣ многоугольникъ силъ *не будетъ плоскимъ,* поэтому предыдущій чертежъ, какъ и всѣ послѣдующіе чертежи, относящіеся къ статикѣ въ пространствѣ, имѣютъ только *условное значеніе.*

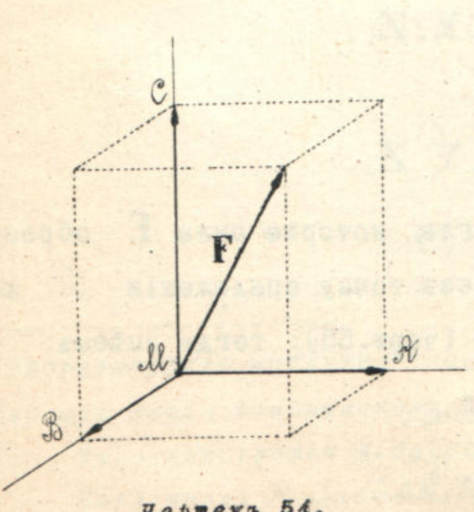
Вспоминая то, что было выше изложено относительно геометрическаго *сложенія векторовъ,* мы можемъ высказать слѣдующую теорему: *равнодѣйствующая скольких угодно силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, равна по величинѣ и направленію геометрической суммѣ этихъ силъ.*

Въ случаѣ *трехъ* силъ равнодѣйствующая изображается діагональю параллелепипеда, построеннаго на этихъ силахъ (чертежъ 53): діагональ MC есть замыкающая многоугольника $MABC$.

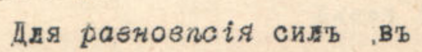


Чертежъ 53.

Разложеніе данной силы на n составляющихъ, не лежащихъ въ одной съ нею плоскости, будетъ вполнѣ опредѣленнымъ, - какъ видно изъ многоугольника силъ, если даны величины и направленія $(n-1)$ *составляющихъ;* но разложеніе будетъ опредѣленнымъ также и въ нѣкоторыхъ иныхъ случаяхъ, напримѣръ, тогда, когда мы разлагаемъ данную силу на три составляющія по тремъ даннымъ прямымъ; если эти прямыя взаимноперпендикулярны, то *составляющія* равны по величинѣ *проекціямъ* данной силы (черт. 54).



Чертежъ 54.


Для *равновѣсія* силъ въ

разсматриваемомъ случаѣ необходимо и достаточно, чтобы многоугольникъ силъ былъ *замкнутъ*.

Всѣ вопросы о сложеніи, разложеніи и равновѣсіи силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, могутъ быть рѣшаемы съ помощью проекцій силъ на нѣкоторыя оси; для большей простоты эти оси берутся обыкновенно взаимноперпендикулярными.

Способъ проекцій имѣетъ особенно важное значеніе для статики въ пространствѣ.

Примѣняя извѣстную геометрическую теорему относительно проекцій замыкающей какого угодно многоугольника (плоскаго или неплоскаго) къ многоугольнику силъ, мы получаемъ слѣдующую теорему статики:

проекція равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, на всякую ось равна суммѣ проекцій составляющихъ на ту же самую ось.

Возьмемъ три взаимноперпендикулярныя оси OX, OY, OZ; обозначимъ проекціи на эти оси силъ:

$$F_1 \text{ черезъ } X_1, Y_1, Z_1,$$

$$F_2 \text{ черезъ } X_2, Y_2, Z_2,$$

....

$$F_n \text{ черезъ } X_n, Y_n, Z_n.$$

Пусть будутъ α_i, β_i, γ_i углы, которые сила F_i образуетъ съ прямыми, проведенными черезъ точку приложенія M параллельно осямъ OX, OY, OZ (черт.55); тогда имѣемъ:

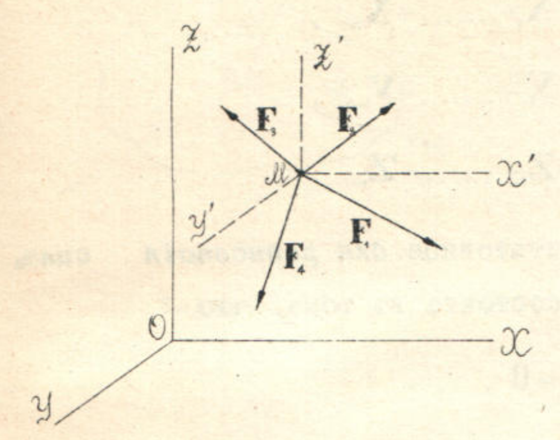
$$X_i = F_i . \cos\alpha_i ,$$

$$Y_i = F_i . \cos\beta_i .$$

$$Z_i = F_i . \cos\gamma_i \; ;$$

причемъ

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1 \; ;$$



Чертежъ 55.

буква i обозначаетъ любое изъ чиселъ 1, 2, 3, ...n.

Обозначаемъ равнодѣйствующую черезъ $\mathfrak{R}$, а проекціи ея на взятыя нами оси черезъ X, Y, Z; тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots + Z_n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Зная X, Y, Z, мы найдемъ величину равнодѣйствующей по формулѣ:

$$\mathfrak{R} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \; ;$$

а направленіе равнодѣйствующей, именно, углы, которые она составляетъ съ направленіями осей, по формуламъ:

$$\cos(\mathfrak{R}, OX) = \frac{X}{\mathfrak{R}} \, ,$$

$$\cos(\mathfrak{R}, OY) = \frac{Y}{\mathfrak{R}} \, ,$$

$$\cos(\mathfrak{R}, OZ) = \frac{Z}{\mathfrak{R}} \, .$$

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. МЕЩЕРСКІЙ.
Изданіе Кассы Взаимопомощи Студ. СПБ. Политехн. Института.
Типо-литографія И. Трофимова. СПБ. Можайская, 3.
Корректоръ А. Сабанѣевъ. Листъ 5.

Если будутъ заданы: сила $\mathfrak{R}$ и (n - 1) ея составляющихъ, то по формуламъ (1) найдемъ проекціи n -ой составляющей:

$$X_n = X - X_1 - X_2 - \ldots\ldots - X_{n-1} ,$$

$$Y_n = Y - Y_1 - Y_2 - \ldots\ldots - Y_{n-1} ,$$

$$Z_n = Z - Z_1 - Z_2 - \ldots\ldots - Z_{n-1} .$$

Условіе, необходимое и достаточное *для равновѣсія силъ*, приложенныхъ въ одной точкѣ, состоитъ въ томъ, что

$$\mathfrak{R} = 0 ,$$

слѣдовательно,

$$X = 0 ,$$

$$Y = 0 ,$$

$$Z = 0 ,$$

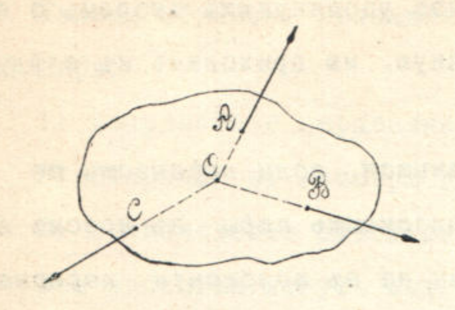
а потому оно выражается слѣдующими тремя равенствами (2):

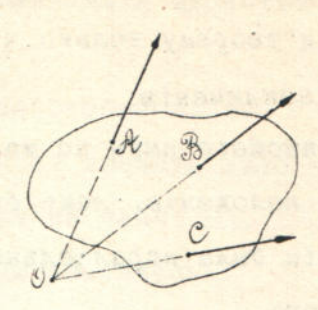
$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n = 0 \\ Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots + Z_n = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

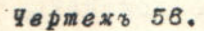
§ 2. *Силы, приложенныя въ разныхъ точка тѣла, но направленныя по прямымъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ.*

Точка пересѣченія линій дѣйствія силъ можетъ находиться внутри тѣла или на его поверхности (черт.56), но можетъ быть и внѣ тѣла (черт.57); - въ послѣднемъ случаѣ мы разсматриваемъ эту точку, какъ неизмѣнно съ тѣломъ связанную.

Переносимъ точки приложенія силъ въ точку пересѣченія ихъ линій дѣйствія и такимъ образомъ приходимъ къ случаю, разсмотрѣнному въ предыдущемъ параграфѣ.






Чертежъ 56.

Чертежъ 57.

ГЛАВА VIII.

ПАРЫ СИЛЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

§ 1.

Въ статикѣ на плоскости были доказаны двѣ теоремы относительно тѣхъ измѣненій пары, при которыхъ дѣйствіе ея на тѣло не измѣняется; докажемъ теперь третью теорему:

Дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если перенести пару въ плоскость, параллельную ея первоначальной плоскости, причемъ плечо пары въ новомъ положеніи будетъ параллельно плечу въ положеніи первоначальномъ.

Доказательство. Пусть $A'B'$ новое положеніе плеча AB (черт.58); присоединяемъ къ двумъ даннымъ силамъ $P=Q$ четыре равныя имъ силы F_1 , F_2 , F_3 , F_4 ; замѣняемъ силы P и F_1 ихъ равнодѣйствующею R_1 , а силы Q и F_2 ихъ равнодѣйствующею R_2 ; очевидно

$$R_1=R_2;$$

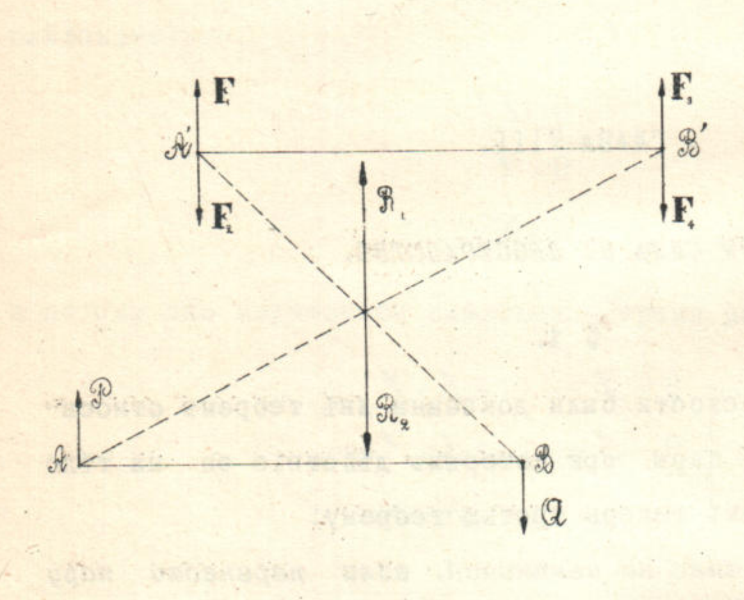
удаляя взаимноуравновѣшивающіяся силы R_1 и R_2, получаемъ пару силъ F_3 и F_4 , которая и будетъ эквивалентною данной парѣ

силъ $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.

Принимая во вниманіе первую изъ упомянутыхъ теоремъ о парахъ и теорему только что доказанную, мы приходимъ къ слѣдующему *заключенію:*

Дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если перенести ее въ любое положеніе, лишь бы только плоскость пары въ новомъ положеніи была параллельна плоскости ея въ положеніи первоначальномъ.

Съ помощью указаннаго слѣдствія можно доказать, что *пара не имѣетъ равнодѣйствующей въ пространствѣ.*



Чертежъ 58.

Въ самомъ дѣлѣ, если существуетъ равнодѣйствующая, то она или пересѣкаетъ плоскость пары или ей параллельна; сила, равная и противоположная равнодѣйствующей , должна уравновѣшивать пару; перенесемъ пару такъ, чтобы одна изъ ея силъ пересѣкла предполагаемую уравновѣшивающую силу; тогда уже нетрудно видѣть, что равновѣсіе и въ томъ и въ другомъ случаѣ невозможно.

На основаніи трехъ доказанныхъ теоремъ мы приходимъ къ слѣдующему общему *заключенію:*

дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если замѣнить ее другою парою гдѣ либо въ ея плоскости или въ плоскости ей параллельной, лишь бы только новая пара стремилась вращать тѣло въ ту же сторону и произведеніе силы на плечо имѣло прежнюю ве-

личину.

Такимъ образомъ *неизмѣнны* только слѣдующія свойства данной пары:

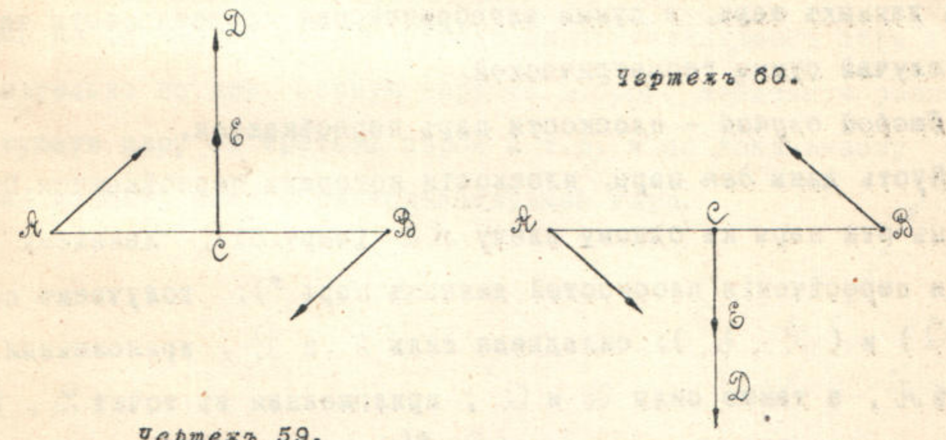
1) направленіе перпендикуляра въ плоскости пары;

2) сторона, въ которую пара стремится вращать тѣло;

3) произведеніе одной изъ силъ пары на плечо ея.

Эти свойства могутъ быть изображены *графически.*

Изъ *какой-либо* точки C проводимъ перпендикуляръ CD (чертежъ 59 и 60)*) къ плоскости пары въ такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположеннаго по направленію этого перпендикуляра, вращеніе, которое пара стремится сообщить тѣлу, происходило слѣва направо, т.е. по часовой стрѣлкѣ; - прямая CD называется *осью пары.*



Чертежъ 60.

Чертежъ 59.

Векторъ CE, направленный по оси пары и имѣющій величину, равную произведенію одной изъ силъ пары на ея плечо, называется *линейнымъ моментомъ пары.*

На основаніи предыдущаго можемъ сказать, что *пара вполнѣ характеризуется ея**) линейнымъ моментомъ.*

---

*) *На чертежахъ 59 и 60 точка C находится въ срединѣ плеча пары, но она можетъ быть взята гдѣ угодно, напримѣръ, въ томъ или другомъ концѣ плеча или въ точкѣ, не лежащей на плечѣ.*

**) *Слово "линейный" часто опускается.*

§ 2.

ТЕОРЕМА. Линейный моментъ пары, полученной отъ сложенія нѣсколькихъ паръ, равенъ по величинѣ и направленію геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ слагаемыхъ паръ.

(Короче: *моментъ равнодѣйствующей пары равенъ геометрической суммѣ моментовъ составляющихъ паръ).*

Доказательство.

Первый случай, - плоскости паръ параллельны.

Переносимъ пары въ одну плоскость и приводимъ ихъ къ одному плечу; складывая затѣмъ силы, приложенныя какъ на одномъ, такъ и на другомъ концѣ общаго плеча, получаемъ равнодѣйствующую пару, моментъ которой равенъ алгебраической суммѣ моментовъ данныхъ паръ, а сумма алгебраическая представляетъ частный случай суммы геометрической.

Второй случай - плоскости паръ пересѣкаются.

Пусть даны *двѣ* пары, плоскости которыхъ пересѣкаются. Приводимъ эти пары къ одному плечу AB (черт.61), лежащему на линіи пересѣченія плоскостей данныхъ паръ *); получаемъ пары (P,Q) и (P_1, Q_1); складывая силы P и P_1, приложенныя въ точкѣ A, а также силы Q и Q_1, приложенныя въ точкѣ B, находимъ равнодѣйствующую пару (R,R'); доказываемъ затѣмъ, что діагональ параллелограмма, построеннаго на моментахъ BC' и BD' данныхъ паръ, изображаетъ величину и направленіе момента пары, полученной отъ сложенія.

Доказательство. Моменты BC' и BD' лежатъ въ плоскости

---

*) *Для удобства чертежа предполагаемъ, что плечо AB перпендикулярно къ плоскости бумаги такъ, что одинъ конецъ его A находится въ плоскости бумаги, а другой конецъ B обращенъ къ читателю; тогда силы P и P_1, приложенныя въ точкѣ A, также лежатъ въ плоскости бумаги.*

бумаги:

$$BC' \perp P$$

и по величинѣ

$$BC' = P.\overline{AB};$$

$$BD' \perp P_1$$

и по величинѣ

$$BD' = P_1.\overline{AB};$$

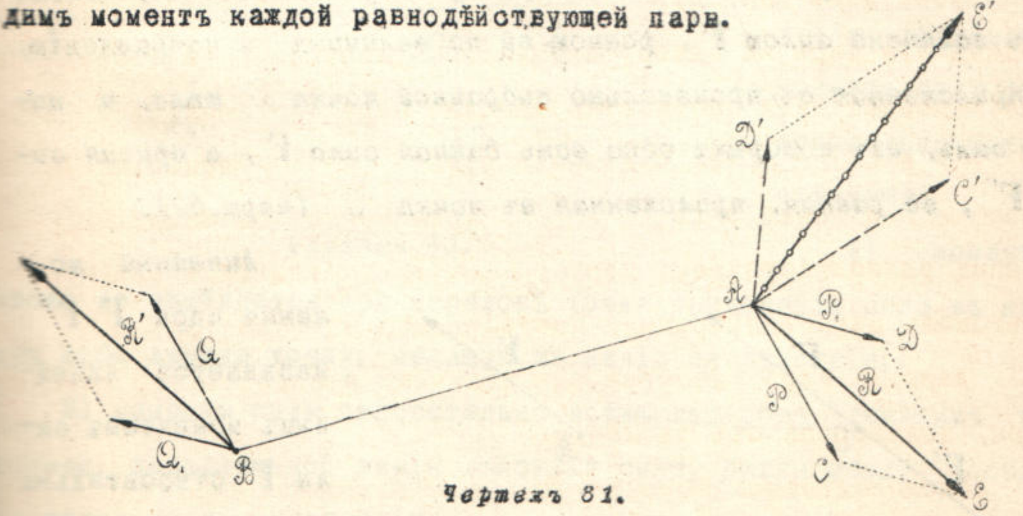
слѣдовательно, треугольники BCE' и BCE подобны, а отсюда слѣдуетъ, что

$$BE' \perp R$$

и по величинѣ

$$BE' = R.\overline{AB};$$

Результатъ, полученный для двухъ паръ, распространяемъ затѣмъ на случай *скольких угодно* паръ; складываемъ пары послѣдовательно по двѣ: первую пару со второй; найденную равнодѣйствующую пару съ третьей парой и т.д. и по доказанному находимъ моментъ каждой равнодѣйствующей пары.



Чертежъ 31.

Такимъ образомъ, *сложеніе паръ приводится къ геометрическому сложенію ихъ линейныхъ моментовъ.*

Пары находятся въ *равновѣсіи,* если геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ равна нулю; въ этомъ случаѣ въ равнодѣйствующей парѣ или силы равны нулю, или плечо равно нулю.

Для того чтобы *разложить* данную пару на нѣсколько составляющихъ паръ, мы разлагаемъ ея линейный моментъ такъ, какъ раньше разлагали силу на ея составляющія, и затѣмъ для каждаго составляющаго момента беремъ какую либо соотвѣтствующую ему пару.

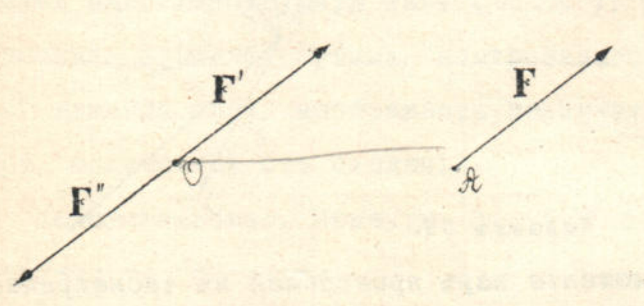
ГЛАВА IX.

ЛИНЕЙНЫЙ МОМЕНТЪ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ.

§ 1. *Моментъ силы относительно точки.*

Принципы второй и третій приводятъ насъ къ слѣдующему заключенію:

Сила $\mathbf{F}$, *приложенная къ твердому тѣлу въ точкѣ* A, *можетъ быть замѣнена силою* $\mathbf{F}'$, *равною ей по величинѣ и направленію, но приложенною въ произвольно выбранной точкѣ* O *тѣла, и парою силъ, изъ которыхъ одна есть данная сила* $\mathbf{F}$, *а другая сила* $\mathbf{F}''$, *ей равная, приложенная въ точкѣ* O *(черт. 62).*



Чертежъ 62.

Линейный моментъ пары $\mathbf{F}\,\mathbf{F}''$ называется линейнымъ моментомъ силы $\mathbf{F}$ относительно точки O.

Точка O называется *центромъ* момента.

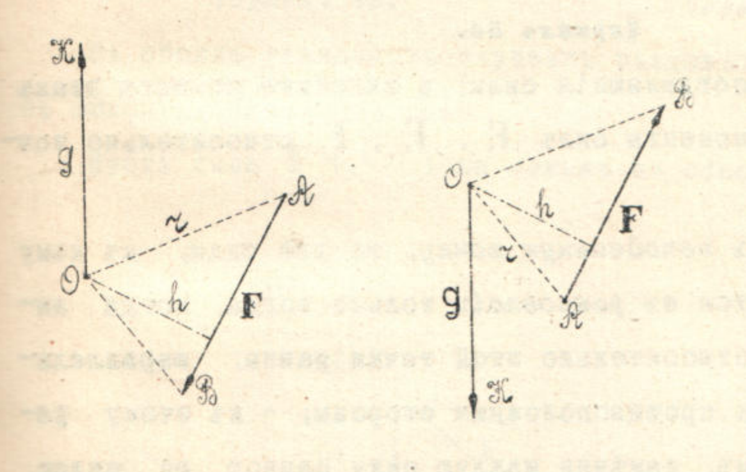
Такимъ образомъ, на основаніи предыдущаго параграфа, *линейный моментъ* силы $\mathbf{F}$ относительно точки O (черт. 63) есть *векторъ* $G = OK$, величина и направленіе котораго опредѣляются

слѣдующимъ образомъ: *величина* равна произведенію величины силы на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ центра момента на линію дѣйствія силы:

$$\mathcal{G} = \mathcal{OK} = \mathbf{F}h = 2\,пл.\triangle \mathcal{AOB} =$$
$$= \mathbf{F}.r.\sin(\mathbf{F}, r).$$

Направленіе есть направленіе перпендикуляра, возстановленнаго къ плоскости, проходящей черезъ центръ момента и силу, въ такую сторону, чтобы наблюдатель, помѣщенный такъ, что перпендикуляръ идетъ отъ ногъ къ головѣ, видѣлъ силу направленною слѣва направо.

Это опредѣленіе линейнаго момента распространяется и на тотъ случай, когда центръ момента *не принадлежитъ* тѣлу.



Чертежъ 63.

Изъ опредѣленія линейнаго момента силы относительно точки слѣдуетъ:

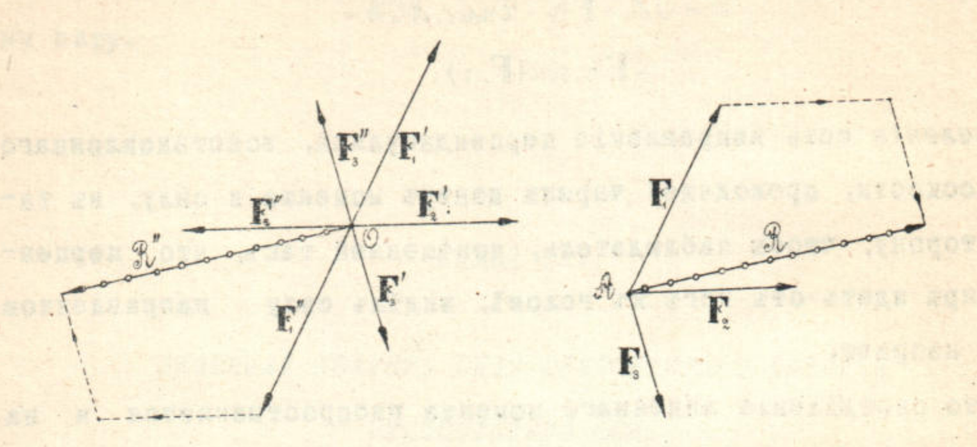
1) моментъ этотъ не измѣняется при переносѣ точки приложенія силы въ какую либо другую точку, лежащую на линіи ея дѣйствія;

2) моменты силы относительно всѣхъ центровъ, лежащихъ на прямой, параллельной линіи дѣйствія силы, равны между собою по величинѣ и направленію;

3) моментъ силы относительно точки равенъ нулю только тогда, когда эта точка лежитъ на линіи дѣйствія силы.

ТЕОРЕМА. *Линейный моментъ равнодѣйствующей силы относительно точки равенъ геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ составляющихъ силъ относительно той же точки.*

Эта теорема слѣдуетъ изъ теоремы о линейномъ моментѣ равнодѣйствующей пары: моментъ равнодѣйствующей силы $\mathcal{R}$ (черт. 64) относительно точки O есть моментъ пары ($\mathcal{R}$, $\mathcal{R}''$), которая получается отъ сложенія паръ: (F_1, F_1''), (F_2, F_2''), (F_3, F_3''),



Чертехъ 64.

гдѣ F_1, F_2, F_3 составляющія силы; а линейные моменты этихъ паръ суть линейные моменты силъ F_1, F_2, F_3 относительно точки O.

Если тѣло имѣетъ *неподвижную точку*, то двѣ силы, къ нему приложенныя, находятся *въ равновѣсіи* только тогда, когда линейные моменты ихъ относительно этой точки равны, параллельны*) и направлены въ противоположныя стороны; - къ этому результату мы приходимъ, замѣняя каждую силу равною ей силою, приложенною къ неподвижной точкѣ и парою силъ.

§ 2. *Моментъ силы относительно оси.*

Если тѣло имѣетъ *неподвижную ось*, то сила, приложенная къ тѣлу, *уравновѣшивается* реакціями оси въ двухъ случаяхъ:

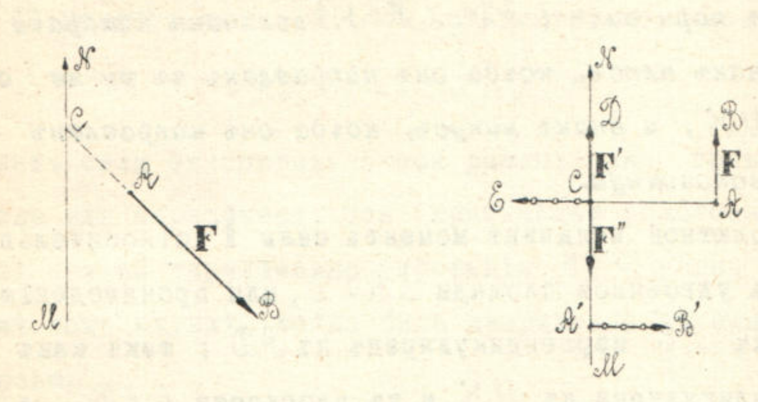
1) когда она пересѣкаетъ ось (черт.65) - очевидно;

2) когда она параллельна оси (черт.66); - для доказательства силу F замѣняемъ равною и параллельною ей силою F',

---

*) *Для этого необходимо, чтобы силы находились въ одной плоскости, проходящей черезъ неподвижную точку.*

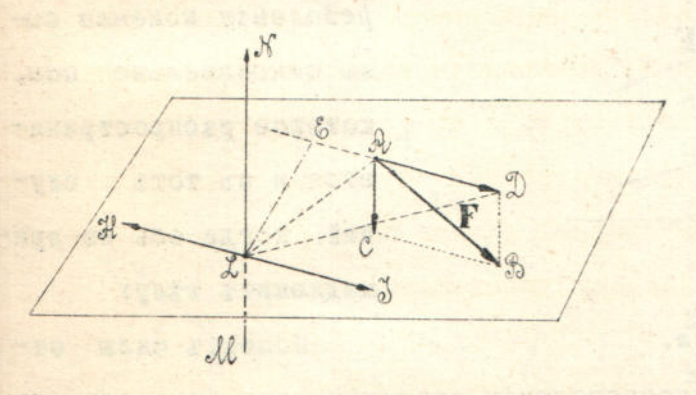
приложенною въ точкѣ C ($AC \perp MN$), и парою силъ ($\mathbf{F}, \mathbf{F}''$); повернувши затѣмъ плечо CA пары на 90°, мы получимъ, вмѣсто силы $\mathbf{F}$, три эквивалентныя ей силы: $\mathbf{F}'$, $A'B' = \mathbf{F}$ и $CE = \mathbf{F}'' = \mathbf{F}$, которыя, очевидно, уравновѣшиваются реакціями оси.



Чертежъ 65. *Чертежъ 66.*

Въ обоихъ указанныхъ случаяхъ равновѣсія сила находится *въ одной плоскости съ осью.*

Пусть сила $\mathbf{F}$ (AB) *не лежитъ въ одной плоскости съ осью* MN (черт.67).



Чертежъ 67.

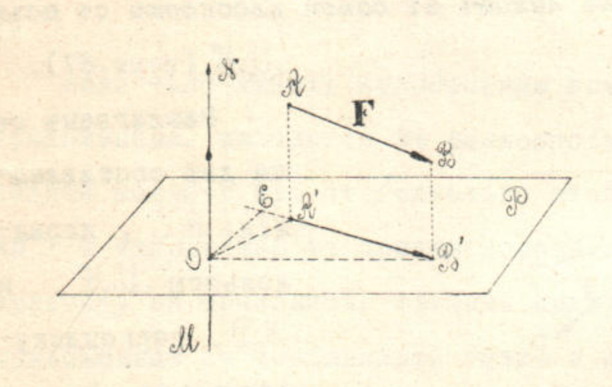
Разлагаемъ ее на двѣ составляющія: AC, параллельную MN, и AD, перпендикулярную къ AC; сила AC, какъ уже извѣстно, уравновѣшивается реакціями оси; черезъ AD проводимъ плоскость, перпендикулярную къ MN, и въ точкѣ пересѣченія L прилагаемъ двѣ взаимноуравновѣшивающіяся силы LH и LJ, равныя и параллельныя AD; можемъ сказать, что *сила* $\mathbf{F}$ производитъ на тѣло такое же дѣйствіе, *какъ пара силъ* AD и LH, такъ какъ сила LJ уравновѣшивается реакціей оси; - это обстоятельство

приводитъ насъ къ понятію о *моментѣ силы относительно оси.*

Оси MN приписывается опредѣленное направленіе, напримѣръ, отъ M къ N.

Моментомъ силы **F** *относительно оси* MN *называется линейный моментъ пары силъ* (AD, LH), *величинѣ котораго приписывается знакъ плюсъ, когда онъ направленъ въ ту же сторону, что и ось* MN, *и знакъ минусъ, когда онъ направленъ въ сторону противоположную.*

По абсолютной величинѣ моментъ силы **F** относительно оси MN равенъ удвоенной площади $\triangle ALD$, или произведенію $AD.LE$, гдѣ отрѣзокъ LE перпендикуляренъ къ AD; такъ какъ линія LE перпендикулярна къ MN и къ плоскости CAD, а, слѣдовательно, и къ AB, то она равна кратчайшему разстоянію между линіей дѣйствія силы **F** и осью MN.



Чертежъ 68.

Получаемъ такимъ образомъ слѣдующее *опредѣленіе момента силы относительно оси,* которое распространяется и на тотъ случай, когда ось не принадлежитъ тѣлу:

Моментъ силы относительно оси равенъ произведенію проекціи силы на плоскость, перпендикулярную къ оси (черт.68), на кратчайшее разстояніе между линіей дѣйствія силы и осью*); это произведеніе берется со знакомъ плюсъ, если наблюдатель, помѣщенный такъ, что ось

---

*) *Кратчайшее разстояніе между линіей дѣйствія силы* AB *и осью* MN *равно длинѣ перпендикуляра* OE, *опущеннаго изъ точки* O *пересѣченія оси съ плоскостью* P, *къ ней перпендикулярною, на прямую* EB', *по которой расположена* $A'B'$, *проекція силы* AB *на плоскость* P.

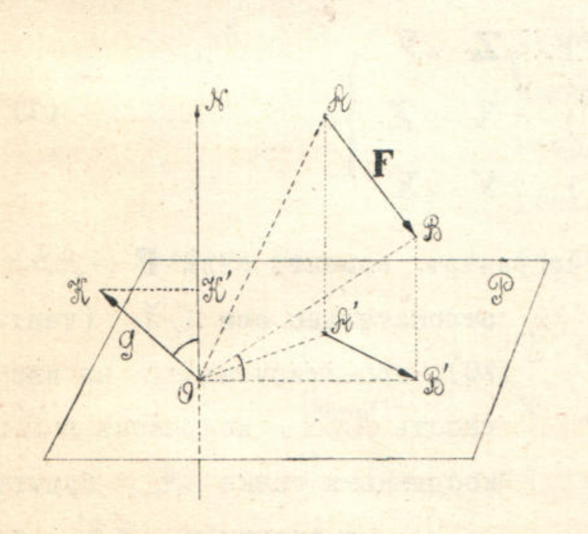
проходитъ отъ ногъ къ головѣ, видитъ силу направленною слѣва направо (по часовой стрѣлкѣ), и со знакомъ минусъ въ противоположномъ случаѣ; величина произведенія откладывается на оси отъ любой точки въ ту или другую сторону, смотря по знаку; на чертежѣ 68 моментъ силы $\mathbf{F}=AB$ относительно оси MN равенъ

$$+A'B'.OE=+2\,\text{пл.}\triangle A'OB'.$$

Моментъ силы относительно оси *равенъ нулю* только тогда, когда сила или пересѣкаетъ ось (кратчайшее разстояніе OE равно нулю) или ей параллельна (проекція $A'B'$ равна нулю), т.е. только въ томъ случаѣ, когда сила направлена въ одной плоскости съ осью.

ТЕОРЕМА. Моментъ силы относительно оси равенъ проекціи на ось линейнаго момента силы относительно какой либо точки оси.

Доказательство основывается на томъ, что, какъ извѣстно изъ геометріи, когда прямая AB (черт.69) проектируется на плоскость P, то площадь $\triangle A'OB'$ равна площади $\triangle AOB$, умноженной на косинусъ остраго угла между плоскостями этихъ треугольниковъ; съ другой стороны, если $g=OK$ обозначаетъ линейный моментъ силы $\mathbf{F}$ относительно точки O, то



Чертежъ 69.

$$OK=2\,\text{пл.}\triangle AOB$$

и упомянутый выше косинусъ равенъ $\cos\angle KON$, слѣдовательно, произведеніе $OK.\cos\angle KON=OK'$ и будетъ равно $2\,\text{пл.}\triangle A'OB'$.

Изъ этой теоремы, на основаніи вышесказаннаго о моментѣ

равнодѣйствующей силы относительно точки, слѣдуетъ:

Моментъ относительно оси равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно той же оси.

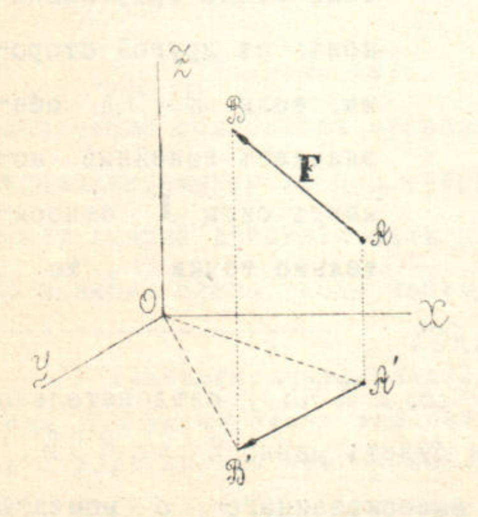
§ 3. *Аналитическія выраженія моментовъ силы относительно оси и относительно точки.*

Возьмемъ три взаимноперпендикулярныя координатныя оси: OX, OY, OZ; обозначимъ черезъ x, y, z координаты точки приложенія силы $\mathbf{F}$, а черезъ $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ проекціи силы $\mathbf{F}$ на координатныя оси.

Примѣняя къ проекціямъ силы $\mathbf{F}$ на каждую изъ координатныхъ плоскостей способъ, указанный на стр. 26 для силы, лежащей въ плоскости XOY, находимъ слѣдующія выраженія для момента силы $\mathbf{F}$ относительно каждой изъ координатныхъ осей:

$$\left.\begin{aligned} m_{ox}(\mathbf{F}) &= y\mathbf{Z} - z\mathbf{Y} \\ m_{oy}(\mathbf{F}) &= z\mathbf{X} - x\mathbf{Z} \\ m_{oz}(\mathbf{F}) &= x\mathbf{Y} - y\mathbf{X} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Для того, чтобы найти, напримѣръ, моментъ силы $\mathbf{F}$ $(=AB)$ относительно оси OZ (черт. 70), проектируемъ AB на плоскость XOY, получаемъ $A'B'$; координаты точки A' будутъ x, y, а проекціи $A'B'$ на оси OX и OY тѣ же, что и для силъ $\mathbf{F}$, т.е. $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, поэтому



Чертежъ 70.

$$2\,пл.\Delta A'OB' = x\mathbf{Y} - y\mathbf{X};$$

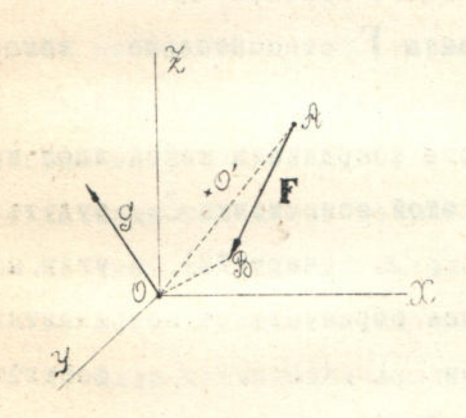
выраженія двухъ другихъ моментовъ получаются посредствомъ круговой перестановки буквъ

x, y, z и $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$.

Моменты силы $\mathbf{F}$ относительно осей $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, параллельныхъ координатнымъ осямъ и проходящихъ черезъ точку O', координаты которой обозначимъ черезъ x_0, y_0, z_0 будутъ, очевидно, выражаться слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} m_{O'X'}(\mathbf{F}) &= (y-y_0)\mathbf{Z} - (z-z_0)\mathbf{Y} \\ m_{O'Y'}(\mathbf{F}) &= (z-z_0)\mathbf{X} - (x-x_0)\mathbf{Z} \\ m_{O'Z'}(\mathbf{F}) &= (x-x_0)\mathbf{Y} - (y-y_0)\mathbf{X} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Обозначимъ черезъ g линейный моментъ силы $\mathbf{F}$ относительно точки O, начала координатъ; на основанiи вышеуказанной связи между моментомъ силы относительно оси и линейнымъ моментомъ силы относительно точки, лежащей на оси, заключаемъ, что проекцiи на координатныя оси линейнаго момента g (черт.71) выражаются по формуламъ (1):



Чертежъ 71.

$$\left.\begin{aligned} g.\cos(g,X) &= y\mathbf{Z} - z\mathbf{Y} \\ g.\cos(g,Y) &= z\mathbf{X} - x\mathbf{Z} \\ g.\cos(g,Z) &= x\mathbf{Y} - y\mathbf{X} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Отсюда слѣдуютъ формулы, опредѣляющiя *величину и направленiе линейнаго момента силы* $\mathbf{F}$ *относительно начала координатъ:*

$$g = \sqrt{(y\mathbf{Z}-z\mathbf{Y})^2 + (z\mathbf{X}-x\mathbf{Z})^2 + (x\mathbf{Y}-y\mathbf{X})^2} \; ;$$

$$\cos(g,X) = \frac{y\mathbf{Z}-z\mathbf{Y}}{g} \; ; \quad \cos(g,Y) = \frac{z\mathbf{X}-x\mathbf{Z}}{g} \; ;$$

$$\cos(\mathcal{G}, Z) = \frac{xY - yX}{\mathcal{G}}.$$

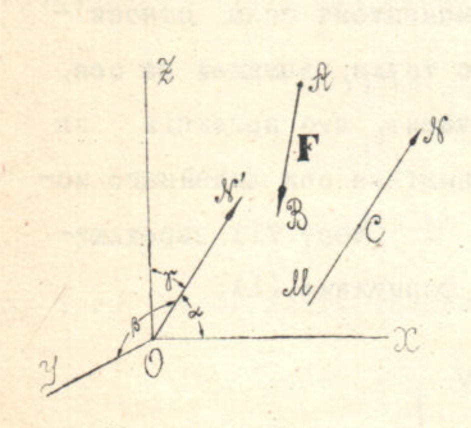
Проекціи на координатныя оси линейнаго момента $\mathcal{G}_0$ силы **F** относительно точки O', имѣющей какія угодно координаты x_0, y_0, z_0, выражаются по формуламъ (2):

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{G}_0 \cos(\mathcal{G}_0, X) &= (y - y_0)\mathbf{Z} - (z - z_0)\mathbf{Y} \\ \mathcal{G}_0 \cos(\mathcal{G}_0, Y) &= (z - z_0)\mathbf{X} - (x - x_0)\mathbf{Z} \\ \mathcal{G}_0 \cos(\mathcal{G}_0, Z) &= (x - x_0)\mathbf{Y} - (y - y_0)\mathbf{X} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Отсюда слѣдуютъ подобныя предыдущимъ формулы для опредѣленія величины и направленія линейнаго момента $\mathcal{G}_0$.

Составимъ выраженіе момента силы **F** относительно *какой-угодно* оси MN.

Пусть координаты какой либо изъ точекъ этой оси, точки C, будутъ: x_0, y_0, z_0 (черт.72), а углы, которые ось образуетъ съ координатными осями OX, OY, OZ, соотвѣтственно будутъ равны α, β, γ.



Чертежъ 72.

Всякій векторъ, какое бы понятіе онъ не изображалъ, равенъ по величинѣ и направленію геометрической суммѣ его проекцій на три взаимно-перпендикулярныя оси, - какъ это видно для случая, когда векторъ изображаетъ силу, на черт. 4. Поэтому, чтобы найти проекцію вектора на какую-либо данную ось, мы должны проекціи его на три координатныя оси умножить соотвѣтственно на косинусы угловъ, которые данная ось составляетъ съ координатными осями, и полученныя произведенія сложить.

Для момента силы **F** относительно оси MN мы получаемъ та-

кимъ образомъ, пользуясь формулами (4), слѣдующее выраженіе:

$$m_{MK}(\mathbf{F}) = \left[(y-y_0)\mathbf{Z}-(z-z_0)\mathbf{Y}\right].\cos\alpha + \\ + \left[(z-z_0)\mathbf{X}-(x-x_0)\mathbf{Z}\right].\cos\beta + \\ + \left[(x-x_0)\mathbf{Y}-(y-y_0)\mathbf{X}\right].\cos\gamma .$$

ГЛАВА X.

СЛОЖЕНІЕ СИЛЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

Въ настоящей главѣ, указавъ приведеніе всякой системы силъ къ одной силѣ и парѣ силъ, мы разсмотримъ затѣмъ всѣ случаи, которые могутъ представиться, а именно:

1) силы находятся въ равновѣсіи;

2) силы приводятся къ одной парѣ;

3) силы приводятся къ одной силѣ;

4) силы приводятся къ двумъ силамъ, не лежащимъ въ одной плоскости.

§ 1. *Общій случай.*

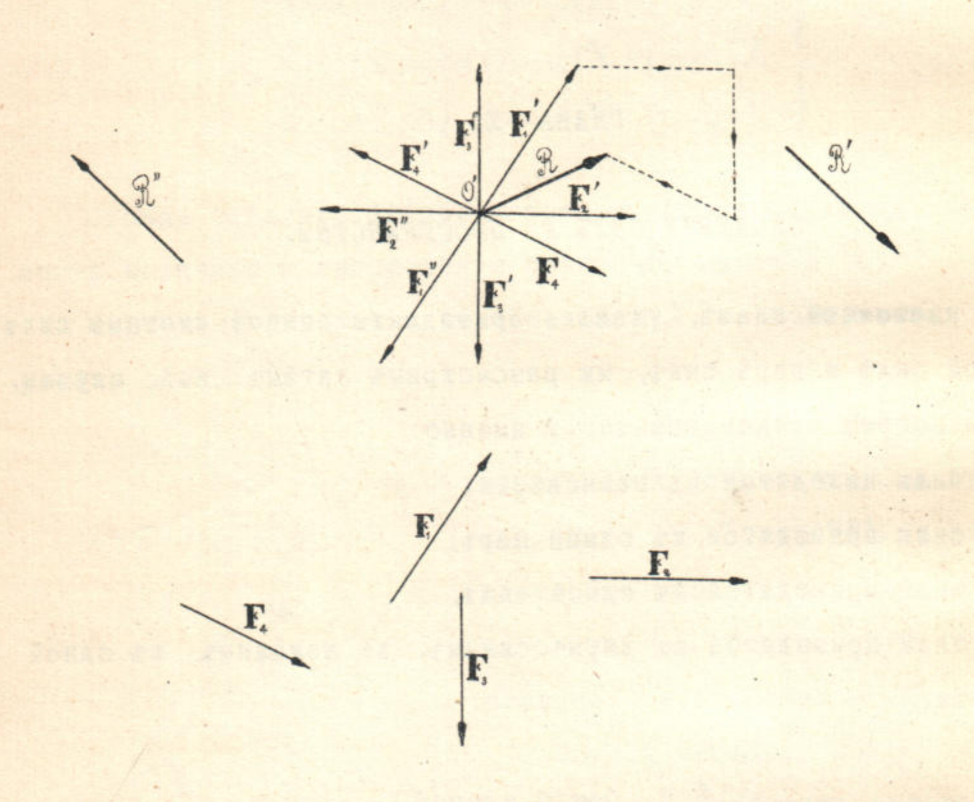
ТЕОРЕМА. Система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, всегда можетъ быть замѣнена одною силою, приложенною въ произвольно выбранной точкѣ тѣла, и парою силъ.

Доказательство. Каждую изъ данныхъ силъ $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ (черт.73) замѣняемъ силою и парою, какъ указано въ началѣ гла-

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. МЕЩЕРСКІЙ.
Изданіе Кассы Взаимопомощи Студ. СПБ. Политехн. Института.
Типо-литографія Н. Трофимова. СПБ. Можайская, 3.
Корректоръ А. Сабанѣевъ. Листъ 6.

вы IX; складывая пары (F_1 , F_1''), (F_2 , F_2''), (F_3 , F_3''), (F_4 , F_4''), получаемъ пару ($\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$), а складывая силы F_1', F_2', F_3', F_4', находимъ силу $\mathfrak{R}$; сила $\mathfrak{R}$ и пара ($\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$) *эквивалентны* данной системѣ силъ.

Введемъ два новыхъ термина: "главный векторъ силъ" и "главный моментъ силъ" относительно нѣкоторой точки.



Чертежъ 73.

Будемъ обозначать проекціи на координатныя оси силы

F_1 чрезъ X_1, Y_1, Z_1,

F_2 чрезъ X_2, Y_2, Z_2,

F_3 чрезъ X_3, Y_3, Z_3,

....

F_n чрезъ X_n, Y_n, Z_n.

а координаты точки приложенія силы

F_1 чрезъ x_1, y_1, z_1,

F_2 чрезъ x_2, y_2, z_2,

F_3 чрезъ x_3, y_3, z_3,

....

F_n чрезъ x_n, y_n, z_n.

Геометрическая сумма данныхъ силъ называется *главнымъ векторомъ* силъ; обозначимъ этотъ векторъ чрезъ V, а проекціи его на координатныя оси через V_x, V_y, V_z, тогда будетъ:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i \\ V_y &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \\ V_z &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Геометрическая сумма линейныхъ моментовъ данныхъ силъ относительно какой либо точки называется *главнымъ моментомъ* силъ относительно этой точки.

Главный моментъ силъ относительно начала координатъ обозначимъ через L, а проекціи его на координатныя оси через L_x, L_y, L_z, тогда будетъ:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^{i=n} \left[y_i Z_i - z_i Y_i \right] \\ L_y &= \sum_{i=1}^{i=n} \left[z_i X_i - x_i Z_i \right] \\ L_z &= \sum_{i=1}^{i=n} \left[x_i Y_i - y_i X_i \right] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Главный моментъ силъ относительно какой либо точки O', имѣющей координаты x_0, y_0, z_0, обозначимъ чрезъ L^0; проекціи его на координатныя оси выражаются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
L^{\circ}_x &= \sum_{i=1}^{i=n}\left[(y_i - y_0)Z_i - (z_i - z_0)Y_i\right] \\
L^{\circ}_y &= \sum_{i=1}^{i=n}\left[(z_i - z_0)X_i - (x_i - x_0)Z_i\right] \\
L^{\circ}_z &= \sum_{i=1}^{i=n}\left[(x_i - x_0)Y_i - (y_i - y_0)X_i\right]
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}
L^{\circ}_x &= L_x - y_0 V_z + z_0 V_y \\
L^{\circ}_y &= L_y - z_0 V_x + x_0 V_z \\
L^{\circ}_z &= L_z - x_0 V_y + y_0 V_x
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Въ самомъ дѣлѣ изъ формулъ (3) имѣемъ:

$$L^{\circ}_x = \sum_{i=1}^{i=n}(y_i Z_i - z_i Y_i) - \sum_{i=1}^{i=n} y_0 Z_i + \sum_{i=1}^{i=n} z_0 Y_i =$$

$$= L_x - y_0 \sum_{i=1}^{i=n} Z_i + z_0 \sum_{i=1}^{i=n} Y_i =$$

$$= L_x - y_0 V_z + z_0 V_y;$$

также получаются двѣ другія формулы (4).

Выраженія: $-y_0 V_z + z_0 V_y$, $-z_0 V_x + x_0 V_z$, $-x_0 V_y + y_0 V_x$, на основаніи формулъ (4) главы IX можно разсматривать, какъ проекціи на координатныя оси момента главнаго вектора силъ, проведеннаго изъ начала координатъ относительно точки O' ; - обозначимъ этотъ моментъ черезъ L' ; тогда въ правыхъ частяхъ формулъ (4) мы имѣемъ проекціи геометрической суммы моментовъ L и L' .

Такимъ образомъ, формулы (4) показываютъ, что главный моментъ силъ относительно точки O' равенъ *геометрической суммѣ двухъ моментовъ:* главнаго момента силъ относительно начала координатъ и момента главнаго вектора, проведеннаго изъ начала

координатъ, относительно точки O' *).

Если главный векторъ силъ равенъ нулю, то главный моментъ ихъ относительно всякой точки, какъ видно изъ формулъ (4), будетъ *одинъ и тотъ же:* по величинѣ и направленію L° будетъ равенъ L.

Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что главный моментъ двухъ силъ, составляющихъ пару, относительно всякой точки будетъ одинъ и тотъ же: онъ равенъ по величинѣ и направленію линейному моменту пары.

Если *главный векторъ силъ не равенъ нулю,* то проекція главнаго момента силъ относительно какой угодно точки на ось, параллельную главному вектору, имѣетъ *одну и ту же величину;* - для доказательства нужно, какъ указано въ концѣ главы IX, умножить формулы (4) соотвѣтственно на $\cos$'-ы угловъ, образуемыхъ главнымъ векторомъ V съ координатными осями, т. е. на $\frac{V_x}{V}$, $\frac{V_y}{V}$, $\frac{V_z}{V}$, и затѣмъ сложить; тогда члены, содержащіе x_0, y_0, z_0, попарно сократятся, и мы получимъ:

$$L^{\circ}.\cos(L^{\circ},V) = L.\cos(L,V).$$

Обратимся теперь къ вышеуказанному приведенію силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, къ *силѣ и парѣ*.

Когда данныя силы приведены къ одной силѣ R, приложенной въ точкѣ O', и къ парѣ силъ (R', R''), то эта *сила R равна главному вектору силъ***) и, слѣдовательно, не зависитъ отъ выбора точки O'; проекціи ея на координатныя оси выражаются по

---

*) *Вообще, если проекція вектора W, имѣющаго какое угодно значеніе, на каждую изъ трехъ коорд. осей равна суммѣ проекцій на ту же ось n векторовъ W_1, W_2, ... W_n, то векторъ W можно разсматривать какъ геометрическую сумму этихъ n векторовъ.*

**) *Сила R есть равнодѣйствующая силъ F_1', F_2', F_3', F_4', слѣдовательно, равна ихъ геометрической суммѣ или, что все равно, геом. суммѣ данныхъ силъ F_1, F_2, F_3, F_4.*

формуламъ (1); *линейный же моментъ пары* (R' , R'') *равенъ главному моменту силъ* *) относительно точки O' и, вообще говоря, зависитъ отъ выбора точки O' ; проекціи его на координатныя оси выражаются по формуламъ (2), если точка O' принята за начало координатъ; въ противномъ случаѣ - по формуламъ (3) или (4).

Двѣ системы силъ будутъ *эквивалентны*, если какъ главные векторы этихъ системъ, такъ и главные моменты ихъ относительно одной и той же точки равны по величинѣ и направленію, - такъ какъ только въ этомъ случаѣ мы можемъ выбрать такую совокупность, состоящую изъ силы и пары, которая будетъ уравновѣшивать въ отдѣльности и ту и другую изъ данныхъ системъ.

Пару (R' , R'') мы всегда можемъ перенести такъ, чтобы одна изъ силъ, напримѣръ, R'' была приложена въ точкѣ O' ; сложивъ R'' съ силою R , найдемъ ихъ равнодѣйствующую R_1 ; мы получимъ такимъ образомъ *двѣ силы* R' *и* R_1 , *эквивалентныя данной системѣ*.

Заключаемъ: *система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть всегда приведена къ одной силѣ и парѣ силъ или къ двумъ силамъ, вообще говоря, не лежащимъ въ одной плоскости.*

Такихъ приведеній существуетъ безчисленное множество, потому что точку O' мы можемъ брать гдѣ угодно и, кромѣ того, можемъ еще замѣнять пару какою либо другою парой, ей эквивалентною.

§ 2. *Случай, когда силы находятся въ равновѣсіи.*

ТЕОРЕМА. *Для того, чтобы силы, приложенныя къ твердому тѣлу, находились въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы и*

---

*) *Пара* (R' , R'') *получается отъ сложенія паръ:* (F_1 , F_1''), (F_2 , F_2''), (F_3 , F_3''), (F_4 , F_4''), *слѣдовательно, линейный моментъ ея равенъ геом. суммѣ моментовъ этихъ паръ, или, что то же самое, лин. моментовъ данныхъ силъ* F_1 , F_2 , F_3 , F_4 *относительно точки* O'.

главный векторъ этихъ силъ и главный моментъ ихъ были равны нулю.

Доказательство. Равновѣсія не будетъ, если и главный векторъ V, и главный моментъ L не равны нулю, такъ какъ (по приведеніи силъ) пара силъ не можетъ уравновѣшиваться одною силою; равновѣсія не будетъ, очевидно, и тогда, когда $V=0$, а L не $=0$, или $L=0$, а V не $=0$; заключаемъ, что для равновѣсія необходимо, чтобы и $V=0$, и $L=0$; достаточность же этихъ условій очевидна.

Условіе: $V=0$ выражается тремя уравненіями:

$$V_x=0\,,\ V_y=0\,,\ V_z=0\,,$$

или

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n}X_i=0\\ \sum_{i=1}^{i=n}Y_i=0\\ \sum_{i=1}^{i=n}Z_i=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Условіе: $L=0$ также выражается тремя уравненіями:

$$L_x=0\,,\ L_y=0\,,\ L_z=0\,,$$

или

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n}(y_iZ_i-z_iY_i)=0\\ \sum_{i=1}^{i=n}(z_iX_i-x_iZ_i)=0\\ \sum_{i=1}^{i=n}(x_iY_i-y_iX_i)=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Шесть уравненій (6) и (7) называются *уравненіями равновѣсія.*

Выведемъ изъ уравненій (6) и (7) уравненія, выражающія условія равновѣсія въ *томъ частномъ случаѣ,* когда силы *парал -*

лельны.

Проведемъ изъ начала координатъ прямую OA (черт.74), параллельную даннымъ силамъ, и пусть α, β, γ, будутъ углы, которые OA образуетъ съ координатными осями OX, OY и OZ.

Обозначимъ через P_1, P_2, ...P_n величины данныхъ силъ, взятыя со знакомъ плюсъ или минусъ, смотря по тому, будетъ ли сила направлена въ ту же сторону, что и прямая OA, или въ сторону противоположную; тогда проекцiи этихъ силъ на координатныя оси будутъ равны:

$$X_1 = P_1.\cos\alpha\,,$$
$$Y_1 = P_1.\cos\beta\,,$$
$$Z_1 = P_1.\cos\gamma\,,$$
$$X_2 = P_2.\cos\alpha\,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_n = P_n.\cos\beta\,,$$
$$Z_n = P_n.\cos\gamma\,.$$

Подставляя эти выраженiя въ уравненiя: (6) и (7) находимъ, что *условiя, необходимыя и достаточныя для равновѣсiя параллельныхъ силъ, выражаются тремя уравненiями:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i.x_i}{\cos\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i.y_i}{\cos\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i.z_i}{\cos\gamma} \ldots\ldots\ldots (9)$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненiя (6) даютъ:

$$\cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0\,,$$
$$\cos\beta \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0\,,$$

$$\cos\gamma \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0 \; ;$$

откуда слѣдуетъ равносильное имъ уравненіе (8); уравненія (7) представляются въ видѣ:

$$\cos\gamma \sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i - \cos\beta \sum_{i=1}^{i=n} P_i z_i = 0 \; ,$$

$$\cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i z_i - \cos\gamma \sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i = 0 \; ,$$

$$\cos\beta \sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i - \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i = 0 \; ;$$

предполагая, что ни одинъ изъ $\cos$'-овъ: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, не равенъ нулю, мы дѣлимъ первое уравненіе на произведеніе $\cos\beta . \cos\gamma$, второе на $\cos\gamma . \cos\alpha$, третье на $\cos\alpha . \cos\beta$, и получаемъ два равносильныя имъ уравненія (9).

Въ частномъ случаѣ, когда одинъ изъ $\cos$ -овъ равенъ нулю, напримѣръ, $\cos\alpha = 0$, два уравненія (9) замѣняются слѣдующими двумя уравненіями:

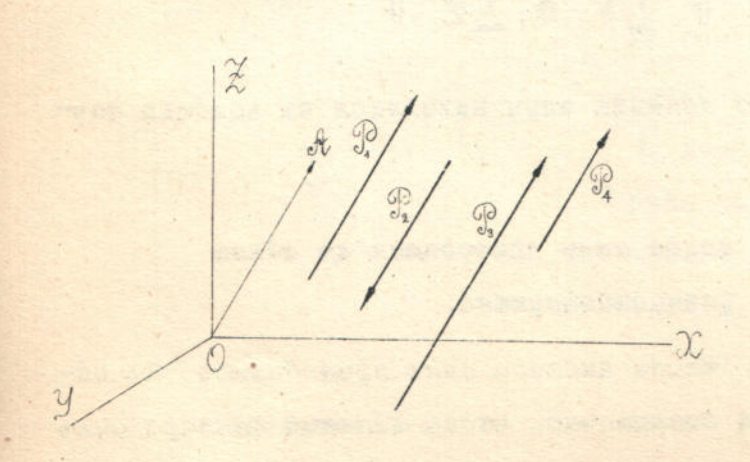
$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i = 0 \; ,$$

$$\cos\gamma \sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i = \cos\beta \sum_{i=1}^{i=n} P_i z_i \; :$$

если же 2 cosinus'а равны нулю, напримѣръ, $\cos\alpha = 0$ и $\cos\beta = 0$ то, вмѣсто двухъ уравненій (9), имѣемъ уравненія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i = 0 \; ,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i = 0 \; .$$



Чертежъ 71.

Равновѣсіе параллельныхъ силъ называется *астатическимъ*, если силы остаются въ равновѣсіи и послѣ того, какъ онѣ будутъ повернуты вокругъ ихъ точекъ приложенія на какой угодно уголъ, лишь бы при этомъ не была нарушена ихъ параллельность.

Условія, необходимыя и достаточныя для *астатическаго равновѣсія параллельныхъ силъ*, выражаются четырьмя уравненіями:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{P}_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{P}_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{P}_i y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{P}_i z_i = 0.$$

Послѣднія три уравненія вытекаютъ изъ уравненій (9), такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ уравненія (9) должны имѣть мѣсто при всякихъ величинахъ угловъ α, β, γ.

§ 3. *Случай, когда силы приводятся къ парѣ.*

Если главный векторъ силъ равенъ нулю, а главный моментъ ихъ нулю не равенъ, то силы приводятся къ парѣ, линейный моментъ которой равенъ главному моменту данныхъ силъ.

Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы данныя силы приводились къ парѣ, выражаются тремя уравненіями:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} Z_i = 0.$$

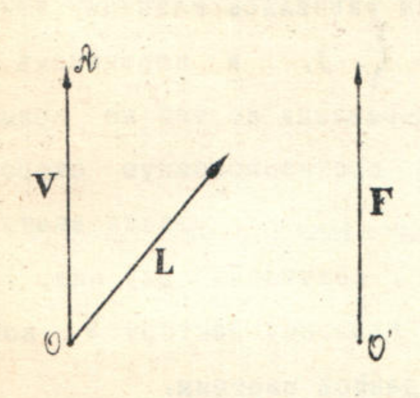
Проекціи линейнаго момента пары находятся съ помощью формулъ (2).

§ 4. *Случай, когда силы приводятся къ одной равнодѣйствующей.*

ТЕОРЕМА. *Для того, чтобы система силъ приводилась къ одной силѣ, необходимо и достаточно, чтобы главный векторъ силъ не равнялся нулю, а главный моментъ былъ или равенъ нулю, или перпендикуляренъ къ главному вектору.*

Доказательство. Пусть сила $\mathbf{F}$ (черт.75), равная по величинѣ и направленію главному вектору $\mathbf{V}$, и пара, моментъ которой равенъ главному моменту $\mathbf{L}$, *эквивалентна* данной системѣ силъ.

1) Доказываемъ *необходимость* условія, заключающагося въ теоремѣ.

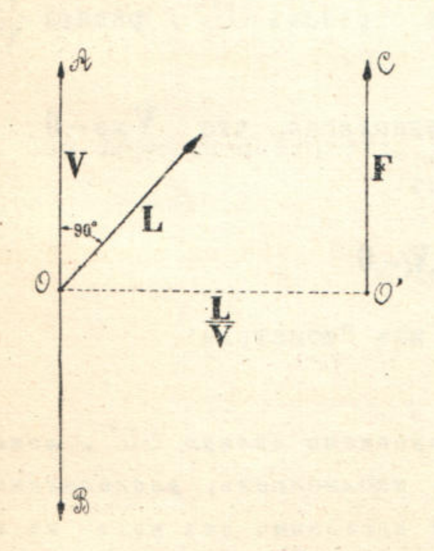


Чертежъ 75.

Допустимъ, что система силъ приводится къ одной силѣ $\mathbf{F}$, приложенной въ точкѣ O'.

Выше было уже указано, что двѣ системы силъ эквивалентны тогда и только тогда, когда ихъ главные векторы и главные моменты соотвѣтственно равны по величинѣ и направленію; въ настоящемъ случаѣ одна система состоитъ изъ одной силы $\mathbf{F}$; поэтому *сила* $\mathbf{F}$ *должна быть равна* по величинѣ и направленію *главному вектору* $\mathbf{V}$, и моментъ ея относительно начала координатъ O долженъ быть равенъ по величинѣ и направленію главному моменту $\mathbf{L}$.

Отсюда слѣдуетъ, если точка O' совпадаетъ съ точкой O, то должно быть $\mathbf{L}=0$; если же точка O' не совпадаетъ съ точкой O, то главный моментъ $\mathbf{L}$ долженъ быть перпендикуляренъ къ плоскости, проходящей черезъ точку O и силу $\mathbf{F}$, а такъ какъ $\mathbf{F} \parallel \mathbf{V}$, то $\mathbf{L} \perp \mathbf{V}$.



Чертежъ 76.

2) Доказываемъ *достаточность* условія, заключающагося въ теоремѣ.

Если $L=0$, то, очевидно, сила F, равная по величинѣ и направленію главному вектору V приложенная въ началѣ координатъ, и будетъ равнодѣйствующею силою.

Пусть $L \perp V$ (черт.76); пару, соотвѣтствующую моменту L, возьмемъ въ такомъ видѣ, чтобы силы равнялись главному вектору V (слѣдовательно, плечо равно $\frac{L}{V}$), и перенесемъ ее такъ, чтобы одна сила OB была направлена по той же прямой, что и главный векторъ OA, но въ противоположную сторону; тогда другая сила пары пойдетъ по $O'C \parallel OA$; удаляя взаимно-уравновѣшивающіяся силы OA и OB, получаемъ одну силу $O'C$, равную (по величинѣ и направленію) главному вектору V, которая и будетъ равнодѣйствующею для данной системы.

Построеніе точки (O') приложенія равнодѣйствующей силы.

Изъ начала координатъ O проводимъ прямую OO', перпендикулярную къ плоскости, заключающей главный векторъ V и главный моментъ данныхъ силъ L, въ такую сторону, чтобы наблюдатель, расположенный по прямой OO' и обращенный лицомъ къ точкѣ A, видѣлъ главный моментъ L направленнымъ слѣва направо *); на этой прямой откладываемъ отрѣзокъ OO', равный $\frac{L}{V}$, и получаемъ искомую точку O'.

Условіе $L=0$ или $L \perp V$, предполагая, что V не $=0$, аналитически выражается равенствомъ:

$$L_x V_x + L_y V_y + L_z V_z = 0 .$$

Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно изъ Геометріи:

---

*) *Сторона, въ которую нужно провести прямую OO', можетъ быть опредѣлена и такимъ образомъ: наблюдатель, расположенный такъ, что главный векторъ силъ OA проходитъ отъ ногъ къ головѣ, и смотрящій на главный моментъ L, долженъ видѣть прямую OO' направленной слѣва направо.*

$$L_x V_x + L_y V_y + L_z V_z = L.V.\cos(L,V),$$

а при главномъ векторѣ V, неравномъ нулю,

$$L.V.\cos(L,V) = 0$$

только тогда, когда или $L = 0$ или

$$\cos(L,V) = 0,$$

т.е.

$$L \perp V.$$

Проекціи равнодѣйствующей силы F будутъ:

$$F.\cos(F,x) = V_x,$$

$$F.\cos(F,y) = V_y,$$

$$F.\cos(F,z) = V_z.$$

Координаты точки O': x_0, y_0, z_0, могутъ быть опредѣляемы по формуламъ:

$$x_0 = \frac{V_y L_z - V_z L_y}{V^2},$$

$$y_0 = \frac{V_z L_x - V_x L_z}{V^2},$$

$$z_0 = \frac{V_x L_y - V_y L_x}{V^2}.$$

Эти формулы получаемъ, рѣшая относительно x_0, y_0, z_0 систему уравненій:

$$y_0 V_z - z_0 V_y = L_x,$$

$$z_0 V_x - x_0 V_z = L_y,$$

$$x_0 V_y - y_0 V_x = L_z;$$

$$x_0 V_x + y_0 V_y + z_0 V_z = 0.$$

Первыя три изъ этихъ уравненій выражаютъ, что моментъ силы F, приложенной въ точкѣ O', относительно каждой изъ координатныхъ осей равенъ главному моменту данныхъ силъ относи-

тельно той же оси; четвертое уравненіе выражаетъ, что прямая OO' перпендикулярна къ направленію главнаго вектора:

$$OO'.V\cos(OO',V) = x_0V_x + y_0V_y + z_0V_z = 0 .$$

Умножимъ третье уравненіе на V_y, второе на V_z и вычтемъ; получимъ:

$$x_0(V_y^2+V_z^2) - y_0V_xV_y - z_0V_xV_z = V_yL_z - V_zL_y ;$$

въ лѣвой части прибавимъ и вычтемъ $x_0V_x^2$; будемъ имѣть:

$$x_0(V_x^2+V_y^2+V_z^2) - V_x(x_0V_x + y_0V_y + z_0V_z) = V_yL_z - V_zL_y ;$$

пользуясь четвертымъ уравненіемъ, находимъ:

$$x_0V^2 = V_yL_z - V_zL_y ;$$

откуда и слѣдуетъ вышенаписанное выраженіе x_0; подобнымъ же образомъ получимъ выраженія для y_0 и z_0.

Частный случай. Параллельныя силы, приложенныя къ тѣлу, если ихъ главный векторъ не равенъ нулю ($\sum_{i=1}^{i=n}P_i$ не $=0$), приводится къ одной силѣ.

Для доказательства проще всего взять координатныя оси такъ, чтобы одна изъ нихъ, напримѣръ, OZ, была параллельна силамъ; тогда

$$V_x = 0,\ V_y = 0,\ L_z = 0 ,$$

а, слѣдовательно, условіе

$$L_xV_x + L_yV_y + L_zV_z = 0$$

удовлетворяется.

Равнодѣйствующая по величинѣ равна алгебраической суммѣ величинъ данныхъ параллельныхъ силъ ($\sum_{i=1}^{i=n}P_i$), параллельна имъ и направлена въ ту или другую сторону, смотря по знаку алгебраической суммы $\sum_{i=1}^{i=n}P_i$.

Одна изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей параллельныхъ силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, обладаетъ

тѣмъ свойствомъ, что положеніе ея *не зависитъ отъ направленія силъ;* - эта точка называется *центромъ параллельныхъ силъ.*

Для того, чтобы показать, что такая точка существуетъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ *опредѣлить ея положеніе,* мы складываемъ послѣдовательно, каждый разъ по двѣ, сначала силы, направленныя въ одну сторону, затѣмъ силы, направленныя въ противоположную сторону, и, наконецъ, двѣ силы, направленныя въ разныя стороны; опредѣляемъ при этомъ каждый разъ соотвѣтствующій центръ; тогда центръ двухъ послѣднихъ силъ и будетъ искомою точкою.

Опредѣленіе: центръ параллельныхъ силъ есть та точка приложенія ихъ равнодѣйствующей, вокругъ которой равнодѣйствующая поворачивается, когда всѣ силы мы повернемъ вокругъ точекъ приложенія на одинъ и тотъ же уголъ, не нарушая ихъ параллельности.

Координаты x_c , y_c , z_c центра параллельныхъ силъ опредѣляются по формуламъ:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i};$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i z_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i};$$

гдѣ x_i , y_i , z_i координаты точки приложенія силы P_i ($i = 1, 2, 3, \ldots n$).

Для *вывода* этихъ формулъ выражаемъ, что моментъ равнодѣйствующей, приложенной въ точкѣ C , равенъ суммѣ моментовъ данныхъ силъ сначала относительно осей OX и OY , въ предположеніи, что силы повернуты такъ, что онѣ параллельны оси OZ , а затѣмъ относительно оси OX въ предположеніи, что силы повернуты такъ, что онѣ параллельны оси OY .

Въ первомъ случаѣ проекціи данныхъ силъ и ихъ равнодѣйствующей на оси OX и OY равны нулю, а проекціи данныхъ силъ на ось OZ будутъ:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$$

и проекція равнодѣйствующей $\sum_{i=1}^{i=n} P_i$; поэтому моменты относительно осей OX и OY даютъ:

$$y_c \sum_{i=1}^{i=n} P_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i \;;$$

$$-x_c \sum_{i=1}^{i=n} P_i = -\sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i \;;$$

во второмъ случаѣ проекціи данныхъ силъ и ихъ равнодѣйствующей на оси OX и OZ равны нулю, а на ось OY проекціи данныхъ силъ

$$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$$

и проекція равнодѣйствующей

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \;;$$

поэтому моменты относительно оси OX даютъ:

$$-z_c \sum_{i=1}^{i=n} P_i = -\sum_{i=1}^{i=n} P_i z_i \;;$$

Такимъ образомъ для приведенія параллельныхъ силъ къ одной силѣ нѣтъ надобности находить точку O', координаты которой x_o, y_o и z_o выражены выше; гораздо *проще* опредѣлить центръ параллельныхъ силъ C (x_c , y_c , z_c); сила, приложенная въ этой точкѣ, параллельная даннымъ силамъ и по величинѣ равная алгебраической суммѣ ихъ величинъ, и будетъ искомою *равнодѣйствующей*.

§ 5. *Случай, когда силы приводятся къ силѣ и парѣ, плоскость которой перпендикулярна къ силѣ.*

ТЕОРЕМА. Если главный векторъ силъ $\mathbf{V}$ *неравенъ нулю, а главный моментъ* $\mathbf{L}$ *не равенъ нулю и не перпендикуляренъ главному вектору, то система силъ можетъ быть приведена къ силѣ и парѣ, плоскость которой перпендикулярна къ силѣ.*

Доказательство. Пусть данныя силы эквивалентны силѣ OA (черт. 77), приложенной въ началѣ координатъ и равной главному вектору $\mathbf{V}$, и парѣ силъ, моментъ которой есть главный моментъ $\mathbf{L}$; эту пару разлагаемъ на двѣ пары такъ, чтобы линейный моментъ одной пары $\mathbf{L}_1$, былъ параллеленъ главному вектору, а линейный моментъ другой $\mathbf{L}_2$ былъ перпендикуляренъ къ главному вектору; тогда будемъ имѣть:

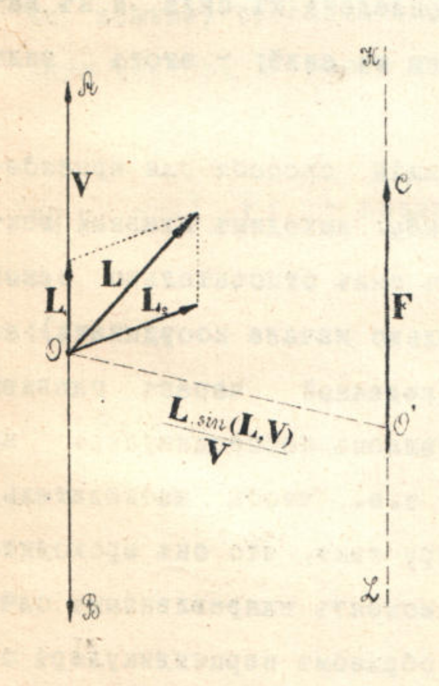
$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}\cos(\mathbf{L},\mathbf{V}) ,$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}\sin(\mathbf{L},\mathbf{V}) .$$

Вторую пару преобразуемъ такъ, чтобы силы ея были равны главному вектору, тогда плечо ея будетъ равно

$$\frac{\mathbf{L}\sin(\mathbf{L},\mathbf{V})}{\mathbf{V}}$$

затѣмъ помѣстимъ эту пару такъ, чтобы одна изъ силъ, OB, была приложена въ точкѣ O по той же прямой, что и сила OA,



Чертежъ 77.

но въ противоположную сторону; тогда вторая сила

$$F = O'C = V$$

будетъ приложена въ точкѣ O', причемъ прямая OO', какъ плечо пары, равна

$$\frac{L \cdot \sin(L, V)}{V}$$

и перпендикулярна къ OB и L_1, а, слѣдовательно, къ плоскости, проведенной въ точкѣ O черезъ главный векторъ V и главный моментъ L.

Удаляя силы OA и OB, какъ взаимно уравновѣшивающіяся, мы получимъ силу

$$F = O'C = V$$

и пару, моментъ которой есть L_1, но $L_1 \| F$, слѣдовательно, плоскость этой пары перпендикулярна къ силѣ F.

Такимъ образомъ, система силъ приведена къ силѣ и къ парѣ, плоскость которой перпендикулярна къ силѣ; - этотъ видъ системы называется *каноническимъ*.

Изъ предыдущаго вытекаетъ слѣдующій *способъ для приведенія системы силъ къ каноническому виду:* находимъ главный векторъ V и главный моментъ L данныхъ силъ относительно какой либо точки O (обыкновенно относительно начала координатъ); затѣмъ изъ точки O къ плоскости, проведенной черезъ главный векторъ и главный моментъ, возстановляемъ перпендикуляръ въ такую сторону, какъ указано въ § 4, т.е., чтобы наблюдатель, расположенный по этому перпендикуляру такъ, что онъ проходитъ отъ ногъ къ головѣ, видѣлъ главный моментъ направленнымъ слѣва направо; на проведенномъ такимъ образомъ перпендикулярѣ откладываемъ длину OO', равную

$$\frac{L \cdot \sin(L, V)}{V};$$

тогда сила F, равная и параллельная главному вектору, и пара,

плоскость которой перпендикулярна къ $\mathbf{F}$, а моментъ $\mathbf{L}_1$ равенъ

$$\mathbf{L}_\cdot \cos(\mathbf{L},\mathbf{V}),$$

будутъ эквивалентны данной системѣ.

Прямая $\mathcal{KL}$, проведенная черезъ точку O' параллельно главному вектору, называется *центральной осью системы;* каждая изъ точекъ центральной оси можетъ быть взята за точку приложенія силы $\mathbf{F}$.

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что *когда система силъ приведена къ каноническому виду, то моментъ пары* ($\mathbf{L}_1$) *есть наименьшій главный моментъ системы.*

Докажемъ, что для всякой точки $\mathcal{D}$, не лежащей на центральной оси, главный моментъ $\mathbf{L}_0$ системы будетъ больше $\mathbf{L}_1$.

Выше уже видѣли, что проекція главнаго момента на направленіе главнаго вектора не зависитъ отъ выбора центра моментовъ, поэтому проекціи моментовъ $\mathbf{L}_0$ и $\mathbf{L}_1$ на направленіе главнаго вектора $\mathbf{V}$ равны между собою; слѣдовательно,

$$\mathbf{L}_0 \cos(\mathbf{L}_0,\mathbf{V}) = \mathbf{L}_1 ;$$

но $\cos(\mathbf{L}_0,\mathbf{V})$ - правильная дробь, а потому

$$\mathbf{L}_0 > \mathbf{L}_1$$

ГЛАВА XI.

ЦЕНТРЪ ТЯЖЕСТИ.

§ 1.

Общій способъ для опредѣленія положенія центра тяжести.

Всѣ тѣла, находящіяся на землѣ или вообще вблизи ея поверхности, подвергнуты дѣйствію силы *тяжести.*

Вслѣдствіе малости размѣровъ разсматриваемыхъ тѣлъ сравнительно съ размѣрами земли, силы тяжести, приложенныя къ различнымъ частямъ тѣла, считаемъ *параллельными*, именно, направленными по вертикали внизъ.

Равнодѣйствующая силъ тяжести, приложенныхъ ко всѣмъ частямъ тѣла, называется *вѣсомъ тѣла*, а центръ этихъ силъ -*центромъ тяжести тѣла*.

Опредѣленіе. *Центръ тяжести* тѣла есть такая точка, которая остается одною изъ точекъ приложенія вѣса тѣла при *всякомъ* положеніи тѣла.

Общій способъ для нахожденія положенія центра тяжести даннаго тѣла состоитъ въ слѣдующемъ: тѣло дѣлимъ на части, центры тяжести которыхъ, а также вѣса, считаемъ извѣстными, и примѣняемъ формулы, выведенныя выше для координатъ центра параллельныхъ силъ.

Пусть будутъ: x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 , ...x_n , y_n , z_n координаты центровъ тяжести частей тѣла и p_1 , p_2, ... p_n соотвѣтствующіе вѣса; x_c , y_c , z_c координаты центра тяжести (g) тѣла; тогда

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} p_i} \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} p_i} \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_i z_i}{\sum_{i=1}^{i=n} p_i} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ $\sum_{i=1}^{i=n} p_i$ есть вѣсъ тѣла.

Изъ формулъ (1) слѣдуетъ:

1) при опредѣленіи центра тяжести тѣла вѣса частей можно замѣнить какими либо пропорціональными имъ величинами;

2) если центры тяжести всѣхъ частей тѣла лежатъ въ одной плоскости, то и центръ тяжести тѣла лежитъ въ этой плоскости;

3) если центры тяжести всѣхъ частей тѣла лежатъ на одной прямой, то и центръ тяжести тѣла лежитъ на этой прямой;

4) если центры тяжести всѣхъ частей тѣла лежатъ въ одной точкѣ, то эта точка и будетъ центромъ тяжести тѣла.

Тѣло называется *тѣломъ однородной плотности,* если вѣса двухъ какихъ угодно частей его относятся между собою, какъ объемы этихъ частей; въ противномъ случаѣ тѣло называется *тѣломъ неоднородной плотности.*

Когда мы имѣемъ тѣло *"однородной плотности"*, то плотностью его называется отношенiе вѣса какой либо части тѣла къ ея объему; если же тѣло *"неоднородной плотности"*, то плотность его въ какой либо точкѣ A опредѣляется слѣдующимъ образомъ: беремъ часть тѣла, заключающую въ себѣ точку A, и находимъ отношенiе вѣса этой части къ ея объему; затѣмъ ищемъ предѣлъ, къ которому это отношенiе стремится по мѣрѣ того, какъ мы будемъ уменьшать объемъ взятой нами части, приближая его къ нулю; полученный такимъ образомъ предѣлъ и называется *плотностью* тѣла въ точкѣ A.

Когда тѣло неоднородной плотности, плотность его въ различныхъ точкахъ, вообще говоря, будетъ различна; если же тѣло однородной плотности, то плотность его во всѣхъ точкахъ одна и та же.

Опредѣленiе центра тяжести упрощается въ тѣхъ случаяхъ, когда тѣло *симметрично относительно плоскости, прямой или точки; въ первомъ случаѣ центръ тяжести тѣла лежитъ въ плоскости симметрiи, во второмъ на оси симметрiи, въ третьемъ онъ совпадаетъ съ центромъ симметрiи.*

Доказательство. Тѣло имѣетъ *плотность симметрiи* P тогда, когда каждой точкѣ A тѣла соотвѣтствуетъ по другую сторону

плоскости P другая точка тѣла B съ такою же плотностью, какъ и точка A, причемъ разстоянія этихъ точекъ отъ плоскости P равны между собою.

Раздѣлимъ тѣло на безконечно малыя части такъ, чтобы безконечно-малые объемы, скружающіе соотвѣтствующія точки A и B были равны, тогда и вѣса ихъ можемъ считать равными, такъ какъ и въ случаѣ тѣла неоднородной плотности разность между этими вѣсами можетъ быть только безконечно-малая величина второго порядка; поэтому центръ тяжести каждыхъ двухъ такихъ частей лежитъ въ плоскости P, а слѣдовательно, и центръ тяжести тѣла лежитъ въ этой плоскости.

Подобное же доказательство примѣняется, какъ въ случаѣ *оси симметріи*, такъ и въ случаѣ *центра симметріи*.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ разсматривать только тѣла однородной плотности.

Во многихъ случаяхъ мы не можемъ раздѣлить данное тѣло на такія *конечныя* части, центры тяжести которыхъ извѣстны; тогда мы дѣлимъ тѣло на части *безконечно-малыя*.

Обозначимъ черезъ ΔV ("дельта V") безконечно-малый объемъ какой либо части, а черезъ x, y, z координаты центра тяжести этого объема или одной изъ его точекъ; тогда изъ формулъ (1), по сокращеніи на плотность, получаемъ слѣдующія формулы для опредѣленія центра тяжести:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\text{Пред.}\sum x\Delta V}{Q}; \\ y_c &= \frac{\text{Пред.}\sum y\Delta V}{Q}; \\ z_c &= \frac{\text{Пред.}\sum z\Delta V}{Q}; \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ Q обозначаетъ объемъ тѣла, а "Пред." обозначаютъ тѣ предѣлы, къ которымъ указанныя суммы приближаются при уменьшеніи

объемовъ Δv до нуля.

При рѣшеніи многихъ вопросовъ приходится опредѣлять не только центръ тяжести объемовъ, но также центръ тяжести *линій, площадей и поверхностей.*

Тѣло, *двумя размѣрами* котораго пренебрегаемъ, (примѣръ - тонкая проволока), мы разсматриваемъ, какъ *линію.*

Плотность однородной линіи (линейная плотность) опредѣляется, какъ отношеніе вѣса какой либо части линіи къ длинѣ этой части.

Формулы (1) примѣнимы и въ случаѣ линіи. Когда линію дѣлимъ на *безконечно-малыя части* Δs, формулы (1), по сокращеніи на плотность, даютъ слѣдующія выраженія для координатъ центра тяжести однородной линіи:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\text{Пред}\sum x \cdot \Delta s}{L}; \\ y_c &= \frac{\text{Пред}\sum y \cdot \Delta s}{L}; \\ z_c &= \frac{\text{Пред}\sum z \cdot \Delta s}{L}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ x, y, z обозначаютъ координаты центра тяжести части Δs (или координаты одной изъ точекъ этой части), а L -длину линіи.

Если линія *плоская*, то, принимая плоскость, въ которой она лежитъ, за плоскость XOY, опредѣляемъ центръ тяжести съ помощью двухъ первыхъ формулъ (3).

Тѣло, *однимъ размѣромъ* котораго пренебрегаемъ (примѣръ - тонкая пластинка), мы разсматриваемъ, какъ *площадь* или *поверхность.*

Плотность однородной площади или поверхности (поверхностная плотность) опредѣляется, какъ отношеніе вѣса какой либо части площади или поверхности къ величинѣ площади этой части.

Формулы (1) примѣнимы и въ случаѣ площади или поверхности.

Когда площадь или поверхность дѣлимъ на *безконечно-малыя части* $\Delta\sigma$, формулы (1), по сокращеніи на плотность, даютъ слѣдующія выраженія для координатъ центра тяжести площади или поверхности:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\text{Пред} \sum x . \Delta\sigma}{S}; \\ y_0 &= \frac{\text{Пред} \sum y . \Delta\sigma}{S}; \\ z_0 &= \frac{\text{Пред} \sum z . \Delta\sigma}{S}; \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

гдѣ x, y, z обозначаютъ координаты центра тяжести части $\Delta\sigma$ (или одной изъ точекъ этой части), а S - величину площади или поверхности.

Въ случаѣ *площади*, принимая ея плоскость за плоскость XOY, опредѣлимъ центръ тяжести съ помощью двухъ первыхъ изъ формулъ (4).

Сказанное выше о случаяхъ симметріи примѣнимо къ центру тяжести какъ линій, такъ и площадей и поверхностей.

§ 2. *Элементарное опредѣленіе положенія центра тяжести въ случаѣ однородной плотности.*

1) *Линіи.*

Центръ тяжести *прямой* находится въ ея серединѣ (центръ симметріи).

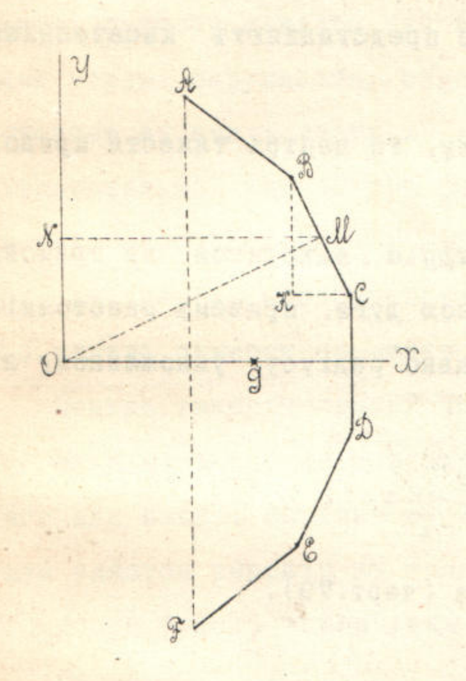
Центръ тяжести *многоугольнаго контура* находится по формуламъ (1).

Примѣръ. Центръ тяжести G части контура правильнаго многоугольника находится на прямой, соединяющей центръ O вписаннаго круга (черт.78) съ серединой данной части многоугольника, причемъ разстояніе OG равно радіусу вписаннаго круга, умно-

женному на замыкающую и дѣленному на периметръ данной части многоугольника.

Пусть: n число сторонъ данной части многоугольника; $l_1=l_2=\dots\dots\dots=l_n=l$ длина сторонъ; $L=\sum_{i=1}^{i=n} l_i$ периметръ; $H=AF$ замыкающая и $R=OM$ радіусъ вписаннаго круга; тогда

$$Og=\frac{R.H}{L}.$$



Доказательство.

Возьмемъ начало координатъ въ центрѣ O вписаннаго круга и ось OX расположимъ по оси симметріи; обозначимъ абсциссы срединъ сторонъ AB, BC,...... черезъ x_1, x_2,......; тогда

$$Og=x_c=\frac{\sum_{i=1}^{i=n} l_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} l_i}.$$

Чертежъ 78.

Прямоугольный треугольникъ BKC, катеты котораго параллельны осямъ OX и OY, подобенъ треугольнику OMN; слѣдовательно:

$$BC:BK=OM:MN,$$

откуда

$$BC.MN=BK.OM;$$

поэтому, обозначая черезъ d_1, d_2,........ длины проекцій сторонъ AB, BC,........на ось OY, имѣемъ:

$$l_i x_i=R d_i;$$

слѣдовательно:

$$Og=\frac{\sum_{i=1}^{i=n} R d_i}{L}=\frac{R\sum_{i=1}^{i=n} d_i}{L};$$

но

$$\sum_{i=1}^{i=n} d_i = H,$$

значитъ

$$Og = \frac{R.H}{L}$$

Центръ тяжести *кривой* опредѣляемъ *приближенно,* замѣняя ее многоугольникомъ, стороны котораго представляютъ касательныя кривой или ея хорды.

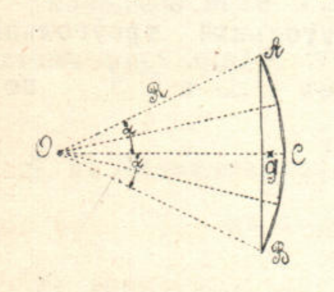
Если удастся перейти къ предѣлу, то центръ тяжести кривой будетъ опредѣленъ *точно.*

Примѣръ: центръ тяжести *дуги круга* находится на прямой, соединяющей центръ круга съ срединою дуги, причемъ разстояніе центра тяжести отъ центра круга равно радіусу, умноженному на хорду и дѣленному на дугу:

$$Og = \frac{R.\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{R.\sin\alpha}{\alpha},$$

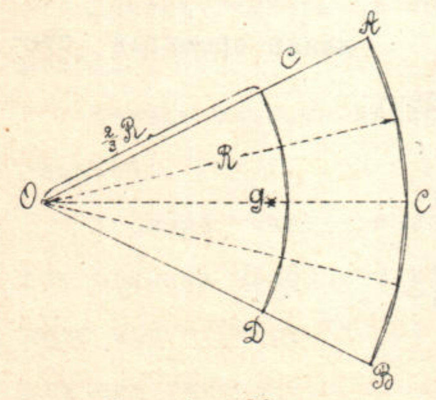
гдѣ α выраженъ въ частяхъ радіуса (черт.79).

2) *Площади и поверхности.*



Чертежъ 79.

Центръ тяжести площади *треугольника* находится на прямой, соединяющей вершину съ серединой основанія, такъ какъ эта прямая есть ось симметріи треугольника; разстояніе центра тяжести по этой прямой отъ основанія равно одной трети ея.



Чертежъ 80.

Центръ тяжести площади *многоугольника* или части поверхности *многоугольника* можемъ всегда найти, раздѣляя на треугольники и примѣняя формулы (1).

Примѣръ. Центръ тяжести

площади кругового сектора AOB (черт.80) совпадаетъ съ центромъ тяжести дуги круга CD, описанной изъ центра O радiусомъ, равнымъ двумъ третямъ радiуса R сектора, и заключающейся между крайними радiусами сектора.

Доказательство. Дѣлимъ секторъ на равные треугольники; центръ тяжести каждаго изъ нихъ лежитъ въ рединѣ соотвѣтствующей хорды окружности, описанной радiусомъ $OC = \frac{2}{3}R$; приложенные въ этихъ центрахъ тяжести вѣса равны между собою, слѣдовательно, ихъ центръ совпадаетъ съ центромъ тяжести периметра многоугольника CD; при увеличенiи числа треугольниковъ въ предѣлѣ многоугольникъ CD совпадетъ съ дугой CD и его центръ тяжести съ центромъ тяжести дуги CD.

Центръ тяжести *кривой поверхности опредѣляется приближенно*, если замѣнить ее поверхностью многоугольника, грани котораго или имѣютъ вершины на данной поверхности или касаются ея; если удастся перейти къ предѣлу, то центръ тяжести кривой поверхности будетъ опредѣленъ *точно*.

Примѣръ.

Центръ тяжести поверхности *шарового сегмента* (не считая основанiя) находится на рединѣ его высоты.

Для доказательства дѣлимъ поверхность сегмента на пояса равной высоты; - поверхности такихъ поясовъ равны между собою; ихъ центры тяжести лежатъ на прямой, представляющей высоту сегмента, причемъ равнымъ отрѣзкамъ этой прямой соотвѣтствуютъ и равные вѣса; въ предѣлѣ получимъ то же, что мы имѣемъ въ случаѣ отрѣзка прямой однородной плотности, и слѣдовательно, центръ тяжести поверхности сегмента будетъ въ рединѣ его высоты.

3) *Объемы.*

Центръ тяжести G *тетраедра* (черт.81) находится на прямой, соединяющей вершину *тетраедра* съ центромъ тяжести осно-

ванія, причемъ разстояніе центра тяжести $\mathcal{G}$ по этой прямой отъ основанія равно одной четверти ея.

Пусть $\mathcal{F}$ центръ тяжести $\triangle \mathcal{ABC}$; если мы раздѣлимъ тетраэдръ на безконечно тонкіе слои плоскостями, параллельными $\mathcal{ABC}$, тогда центры тяжести всѣхъ этихъ слоевъ будутъ лежать на прямой $\mathcal{DF}$, слѣдовательно, и центръ тяжести тетраэдра $\mathcal{G}$ тоже лежитъ на прямой $\mathcal{DF}$.

Если $\mathcal{H}$ центръ тяжести $\triangle \mathcal{BCD}$, то центръ тяжести тетраэдра $\mathcal{G}$ долженъ лежать и на прямой $\mathcal{AH}$; слѣдовательно, центръ тяжести $\mathcal{G}$ находится на пересѣченіи прямыхъ $\mathcal{DF}$ и $\mathcal{AH}$.

Изъ подобія треугольниковъ $\mathcal{ADE}$ и $\mathcal{FEH}$ находимъ:

$$\mathcal{FH}=\frac{1}{3}\mathcal{AD};$$

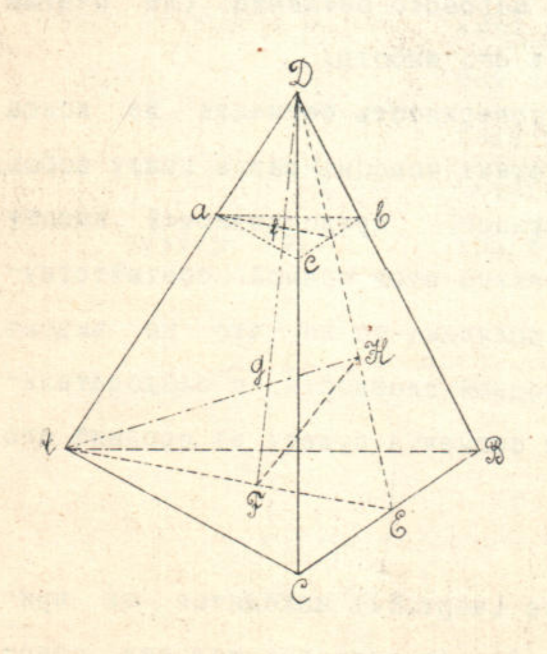
а тогда изъ подобія $\mathcal{AGD}$ и $\mathcal{FGH}$ получаемъ:

$$\mathcal{GF}=\frac{1}{3}\mathcal{GD}.$$

слѣдовательно

$$\mathcal{DG}=\frac{3}{4}\mathcal{DF}$$

Центръ тяжести *пирамиды* совпадаетъ съ центромъ тяжести площади, полученной отъ пересѣченія пирамиды плоскостью, параллельной основанію, на разстояніи отъ него, равномъ одной четверти высоты; къ этому заключенію мы приходимъ, раздѣляя пирамиду на тетраэдры.



Чертежъ 81.

Центръ тяжести *круглаго конуса* находится на прямой, соединяющей вершину съ центромъ основанія на разстояніи, равномъ одной четверти

высоты; - это слѣдуетъ изъ того, что конусъ можно разсматривать какъ предѣльный случай пирамиды.

Центръ тяжести объема *многогранника* находимъ, раздѣляя его на тетраедры и примѣняя формулы (1).

Центръ тяжести объема, ограниченнаго *кривою поверхностью*, находимъ *приближенно*, замѣняя кривую поверхность поверхностью многогранника, грани котораго имѣютъ вершины на данной поверхности или касаются ея; если удастся перейти къ предѣлу, центръ тяжести даннаго объема будетъ опредѣленъ *точно*.

Примѣръ: центръ тяжести объема *шарового сектора* совпадаетъ съ центромъ тяжести поверхности шарового сегмента, описаннаго изъ того же центра радіусомъ, равнымъ тремъ четвертямъ радіуса сектора, и заключающагося внутри сектора.

Опытное опредѣленіе положенія центра тяжести производится посредствомъ подвѣшиванія на нити, посредствомъ уравновѣшиванія на остріѣ ножа и другими способами.

ГЛАВА XII.

РАВНОВѢСІЕ НЕСВОБОДНАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА.

Рѣшеніе вопроса о равновѣсіи несвободнаго твердаго тѣла основывается на *принципѣ пятомъ;* пользуясь этимъ принципомъ, мы можемъ примѣнить въ случаѣ *несвободнаго* тѣла выведенныя выше уравненія, выражающія условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ *свободному* тѣлу.

Задача о равновѣсіи несвободнаго тѣла распадается на двѣ: *первая задача:* найти необходимыя и достаточныя условія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы для того, чтобы рав-

новѣсіе существовало; *вторая:* опредѣлить величины и направленія реакцій опоръ.

Если опредѣлена *реакція* какой либо опоры, то опредѣлено и *давленіе* тѣла на эту опору, такъ какъ давленіе равно по величинѣ и противоположно по направленію реакціи.

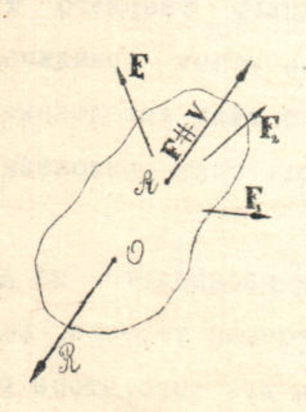
Первая задача можетъ быть рѣшена съ помощью статики - во *всѣхъ* случаяхъ; вторая только тогда, когда существующія опоры не препятствуютъ тѣмъ измѣненіямъ тѣла, которыя происходятъ вслѣдствіе физическихъ причинъ, напримѣръ, нагрѣванія, схлажденія и такъ далѣе.

Будемъ обозначать, какъ въ § 1 гл. IX, черезъ V главный векторъ задаваемыхъ силъ, черезъ L ихъ главный моментъ относительно начала координатъ, чрезъ L_x, L_y, L_z проекціи момента L на координатныя оси, или главные моменты относительно координатныхъ осей; разсмотримъ случаи, указанные въ слѣдующихъ параграфахъ.

§ 1. *Тѣло имѣетъ неподвижную точку.*

Изъ извѣстныхъ свойствъ реакціи неподвижной точки слѣдуетъ:

a) для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемыя силы имѣли равнодѣйствующую, линія дѣйствія которой проходитъ черезъ неподвижную точку O (черт. 82);



Чертежъ 82.

b) реакція $\mathcal{R}$ равна по величинѣ и противоположна по направленію равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ.

Проекціи реакціи на координатныя оси обозначимъ черезъ X', Y', Z'; неподвижную точку примемъ за начало координатъ; тогда *уравненія равновѣсія* будутъ:

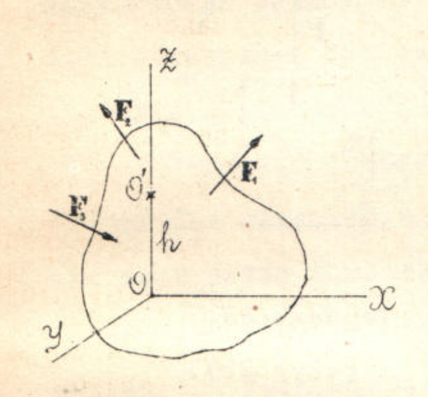
$$V_x + X' = 0\,;\quad V_y + Y' = 0\,;\quad V_z + Z' = 0\,; \qquad (1)$$

2) $$L_x=0\ ;\ L_y=0\ ;\ L_z=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Изъ уравненій (2) слѣдуетъ условіе (a), а тогда изъ уравненій (1) - заключеніе (b).

§ 2. *Тѣло имѣетъ двѣ неподвижныя точки.*

Одну изъ двухъ неподвижныхъ точекъ O и O' (черт. 83), именно точку O, примемъ за начало координатъ, и ось OZ направимъ по прямой OO'; пусть разстояніе $OO'=h$; реакція въ точкѣ O пусть будетъ $R'(X', Y', Z')$, реакція въ точкѣ O' будетъ $R''(X'', Y'', Z'')$; тогда *уравненія равновѣсія* напишемъ въ видѣ:



Чертежъ 83.

$$\left.\begin{array}{l} V_x+X'+X''=0\ ;\ L_x-hY''=0\ ; \\ V_y+Y'+Y''=0\ ;\ L_y+hX''=0\ ; \\ V_z+Z'+Z''=0\ ;\ L_z=0\ . \end{array}\right\}\ldots(3)$$

Послѣднее изъ уравненій (3) выражаетъ необходимое и достаточное *условіе равновѣсія;* остальныя пять уравненій служатъ для опредѣленія реакцій; при этомъ проекціи реакцій на ось OO' вполнѣ не опредѣляются, такъ какъ извѣстно только, что $Z'+Z''=-V_z$, это можно было предвидѣть, такъ какъ закрѣпленіе двухъ точекъ не позволяетъ имъ удаляться другъ отъ друга при нагрѣваніи тѣла.

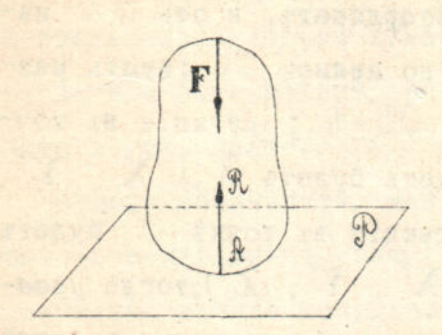
§ 3. *Тѣло опирается нѣсколькими точками на гладкую плоскость.*

Слѣдствія, которыя легко выводятся изъ извѣстныхъ *свойствъ реакцій* гладкой плоскости въ точкахъ прикосновенія къ ней твердаго тѣла

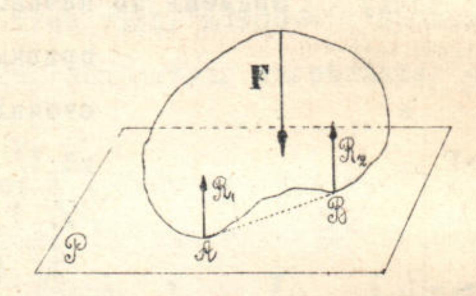
1) *Одна* точка прикосновенія $\mathcal{A}$ (черт.84).

a) Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемыя силы имѣли равнодѣйствующую, которая была бы направлена къ плоскости $\mathcal{P}$ по перпендикуляру къ ней въ точкѣ $\mathcal{A}$;

b) Реакція равна по величинѣ и противоположна по направленію равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ.



Чертежъ 84.

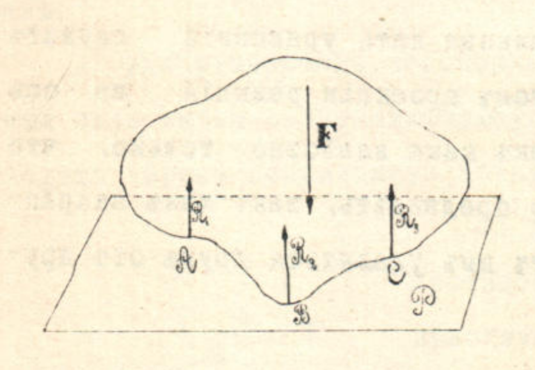


Чертежъ 85.

2) *Двѣ* точки прикосновенія ($\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$) (черт.85).

a) Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемыя силы имѣли равнодѣйствующую, которая была бы направлена къ плоскости $\mathcal{P}$ по перпендикуляру къ ней въ точкѣ, лежащей на прямой $\mathcal{AB}$ между точками $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

b) Реакціи $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ будутъ опредѣлены, когда равнодѣйствующую данныхъ силъ разложимъ на двѣ параллельныя ей составляющія, приложенныя въ точкахъ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.



Чертежъ 86.

3) *Три* точки прикосновенія ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) (черт.86).

Могутъ представиться *два случая*.

1) точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ образуютъ треугольникъ;

2) точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ лежатъ на одной прямой.

a) Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемыя силы имѣли равнодѣйствующую, которая была бы направлена къ плоскости $\mathcal{P}$ по перпендикуляру къ ней въ точкѣ, лежащей внутри треугольника ABC, - въ первомъ случаѣ, - и на отрѣзкѣ прямой ABC между крайними его точками, - во второмъ случаѣ.

b) Въ первомъ случаѣ реакціи R_1, R_2, R_3 будутъ опредѣлены, когда равнодѣйствующую данныхъ силъ разложимъ на три параллельныя ей составляющія, приложенныя въ точкахъ A, B, C; во второмъ случаѣ реакціи остаются неопредѣленными.

4) *Четыре и болѣе* точекъ прикосновенія.

a) Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемыя силы имѣли равнодѣйствующую, которая была бы направлена къ плоскости $\mathcal{P}$ по перпендикуляру къ ней въ точкѣ, лежащей внутри контура, проведеннаго черезъ крайнія точки прикосновенія.

b) Реакціи остаются неопредѣленными.

Напишемъ *уравненія равновѣсія* для разсматриваемаго случая (4).

Данную плоскость $\mathcal{P}$ примемъ за плоскость XOY и ось OZ направимъ въ ту сторону, гдѣ находится тѣло. Пусть существуетъ k точекъ прикосновенія, координаты ихъ (x_1, y_1), (x_2, y_2).......(x_k, y_k) и соотвѣтствующія реакціи

$$R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots\ldots\ldots R_k.$$

Уравненія равновѣсія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} &V_x = 0\ ; \\ &V_y = 0\ ; \\ &V_z + \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{R}_k = 0\ ; \\ &L_x + y_1\mathfrak{R}_1 + y_2\mathfrak{R}_2 + \ldots\ldots + y_k\mathfrak{R}_k = 0\ ; \\ &L_y - x_1\mathfrak{R}_1 - x_2\mathfrak{R}_2 - \ldots\ldots - x_k\mathfrak{R}_k = 0\ ; \\ &L_z = 0\ ; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Два первыя и послѣднее изъ уравненій (4) показываютъ, что задаваемыя силы должны имѣть равнодѣйствующую, перпендикулярную къ данной плоскости.

Съ помощью остальныхъ трехъ уравненій мы можемъ опредѣлить реакціи (а слѣдовательно, и давленія тѣла на плоскость) только тогда, когда число ихъ не болѣе трехъ.

К И Н Е М А Т И К А.

(О с н о в н ы я   п о н я т і я).

К И Н Е М А Т И К А

(Основныя понятія).

Кинематика разсматриваетъ движеніе независимо отъ тѣхъ причинъ, которыми оно обусловливается.

Этотъ отдѣлъ Механики основывается только на тѣхъ *принципахъ,* которые лежатъ въ основаніи Геометріи.

О движеніи тѣла мы судимъ по измѣненію разстояній его точекъ отъ точекъ какого либо другого тѣла; смотря по тому, находится ли это второе тѣло въ покоѣ или въ движеніи, движеніе перваго тѣла называется *абсолютнымъ* или *относительнымъ.*

Мы будемъ изучать сначала *абсолютное движеніе.*

§ 1. *Аналитическое и графическое выраженія движенія точки.*

Абсолютное движеніе точки есть непрерывный переходъ ея черезъ точки пространства.

Движущаяся точка вычерчиваетъ въ пространствѣ непрерывную линію, которая называется *траекторіей* точки; -траекторія точки есть геометрическое мѣсто положеній движущейся точки.

Движеніе точки называется *прямолинейнымъ,* если траекторія ея - прямая линія, и *криволинейнымъ,* если траекторія - кривая линія; эта кривая можетъ быть какъ плоскою (напримѣръ, парабола), такъ и неплоскою или "кривою двоякой кривизны" (напримѣръ, винтовая линія).

Движеніе точки считается *извѣстнымъ* тогда, когда для каждаго момента времени можетъ быть указано соотвѣтствующее положеніе точки.

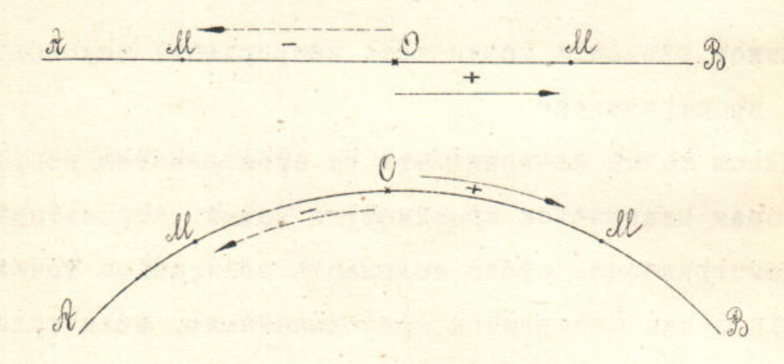
Моментъ времени опредѣляется слѣдующимъ образомъ.

Нѣкоторый произвольно выбранный моментъ времени мы принимаемъ за *эпоху,* т.е. за начало для отсчета времени; беремъ какую либо единицу времени, напримѣръ, секунду; измѣряемъ промежутокъ времени между эпохой и разсматриваемымъ моментомъ; найденному числу приписываемъ знакъ плюсъ или знакъ минусъ, смотря по тому, слѣдуетъ ли разсматриваемый моментъ за эпохой или предшествуетъ ей; полученное такимъ образомъ положительное или отрицательное число, опредѣляющее данный моментъ, обозначаемъ буквою t.

Если возьмемъ, напримѣръ, за эпоху 12 час. дня 26 Февраля, то для момента въ 9 часовъ утра того же дня $t = -3$ ч., а для момента въ 9 ч. утра слѣдующаго дня $t = +21$ часъ, или, проще, $t = 21$ часъ.

Первый способъ для выраженія движенія точки.

Пусть дана *траекторія точки:* прямая или кривая (черт.87).



Чертежъ 87.

Беремъ на траекторіи произвольно выбранную неподвижную точку O; одну сторону траекторіи, напримѣръ, OB, условимся считать положительной, другую - OA - отрицательной.

Выбравъ затѣмъ единицу длины, напримѣръ, сантиметръ, измѣряемъ разстояніе по дугѣ траекторіи отъ точки O до положенія движущейся точки M въ моментъ t; найденному числу приписываемъ знакъ плюсъ или минусъ, смотря по тому, нахо -

дится ли точка M по положительную или по отрицательную сторону траекторіи; - полученное такимъ образомъ положительное или отрицательное число, опредѣляющее положеніе точки на ея траекторіи, обозначимъ буквою

$$s=\pm OM.$$

При данной траекторіи *уравненіе:*

$$s=f(t)\qquad\qquad(1)$$

гдѣ $f(t)$ *есть извѣстная функція отъ* t., *вполнѣ опредѣляетъ движеніе точки;* - уравненіе (1) называется *уравненіемъ движенія точки.*

При вышеуказанномъ условіи относительно знака, s *возрастаетъ,* когда точка движется въ сторону, указанную сплошною стрѣлкою (въ положительную сторону), и *убываетъ* при движеніи точки въ сторону, указанную пунктирною стрѣлкою (въ отрицательную сторону).

Примѣры, въ которыхъ легко составить представленіе о движеніи точки: траекторія или прямая, или дуга окружности, или винтовая линія; уравненіе движенія въ каждомъ случаѣ одно изъ слѣдующихъ трехъ уравненій:

$$s=a+bt;$$

$$s=a+bt+ct^2;$$

$$s=a\sin kt.$$

гдѣ a, b, c, k данныя постоянныя величины.

Для *нагляднаго представленія* движенія точки служитъ *кривая разстояній:* откладываемъ въ избранномъ масштабѣ по оси абсциссъ OX числа t, а по оси ординатъ OY соотвѣтствующія числа s для разсматриваемой движущейся точки; геометрическое мѣсто опредѣляемыхъ такимъ образомъ точекъ C (черт.88) на плоскости XOY и будетъ кривою разстояній (P,Q) для данной

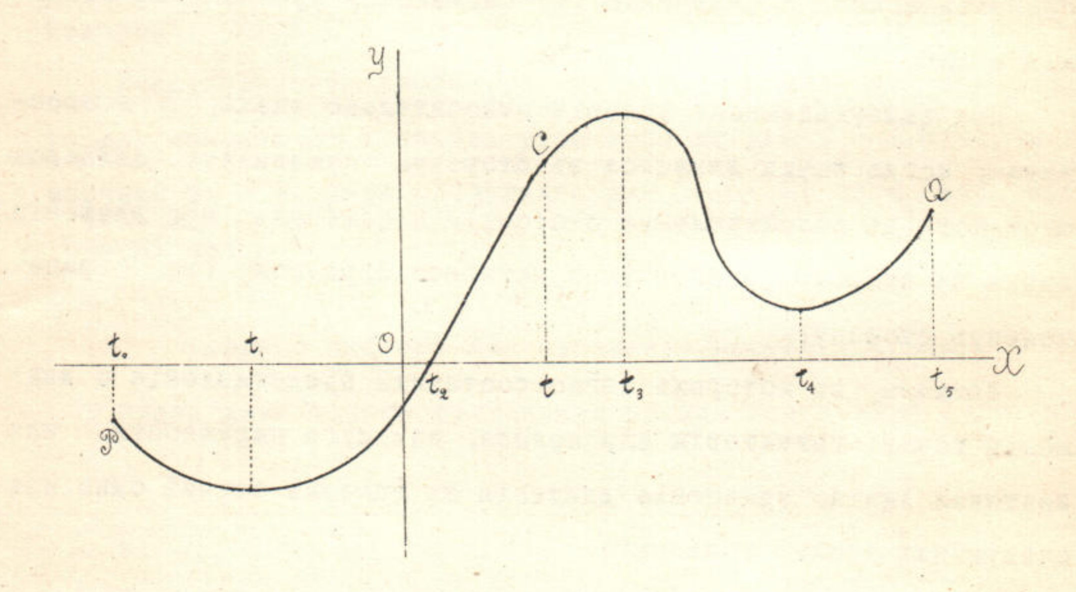
точки.

Уравненіе кривой разстояній въ координатахъ x и y получается изъ уравненія движенія послѣ того, какъ если замѣнимъ въ немъ перемѣнныя: t черезъ x и s черезъ y; если уравненіе движенія точки

$$s=f(t),$$

то уравненіе кривой разстояній будетъ:

$$y=f(x).$$



Чертежъ 88.

Въ предыдущихъ *примѣрахъ* кривыя разстояній будутъ: въ первомъ - прямая, во второмъ - парабола, въ третьемъ - синусоида; уравненія этихъ кривыхъ соотвѣтственно:

$$y=a+bx;$$

$$y=a+bx+cx^2;$$

$$y=a.\sin kx.$$

Если кривая разстояній вычерчена, то при данной траекторіи нетрудно изслѣдовать движеніе точки; - напримѣръ, при кривой

разстояній, изображенной на черт.88, если траекторія прямая, движеніе происходитъ слѣдующимъ образомъ (черт.89):

Чертежъ 89.

отъ положенія M_0 въ моментъ t_0 точка движется влѣво до M_1 (моментъ t_1), отсюда вправо проходитъ черезъ точку O (моментъ t_2) и затѣмъ достигаетъ положенія M_3 (моментъ t_3), далѣе движется влѣво до M_4 (моментъ t_4) и наконецъ вправо до M_5 (моментъ t_5).

Замѣтимъ, что во многихъ случаяхъ прямолинейнаго движенія можно получить кривыя разстояній, которыя будетъ вычерчивать сама движущаяся точка, - напримѣръ, на поверхности круглаго цилиндра, приведеннаго во вращательное движеніе часовымъ механизмомъ; таковы кривыя, показывающія температуру, высоту барометра, давленіе пара и т.д.

Второй способъ для выраженія движенія точки.

Если *траекторія точки не дана, то движеніе точки выражается,* вообще говоря, *тремя уравненіями:*

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

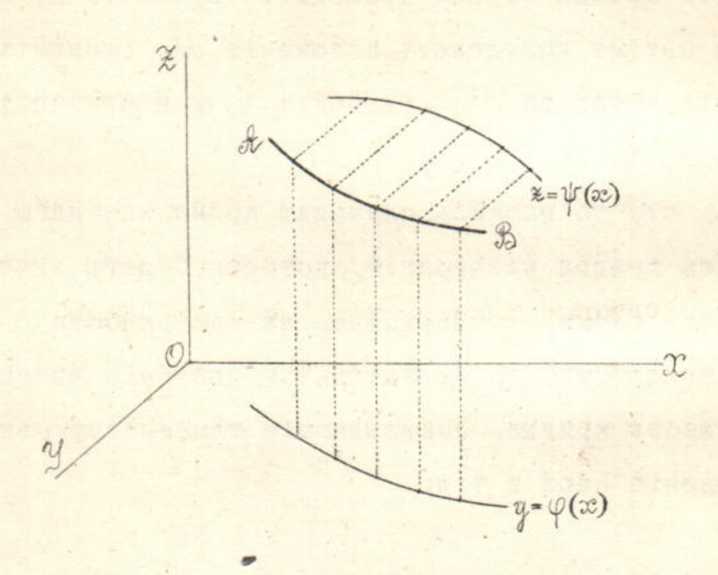
гдѣ x, y, z суть координаты точки, а $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ - *извѣстныя функціи отъ* t.

Замѣтимъ, что каждое изъ уравненій (2) въ отдѣльности опредѣляетъ движеніе *провкціи* движущейся точки на одну изъ координатныхъ осей.

Исключая t изъ уравненій (2), мы получимъ уравненія двухъ цилиндрическихъ поверхностей:

$$y = \varphi(x),$$
$$z = \psi(x).$$

линія пересѣченія которыхъ AB (черт.90) и будетъ *траекторіей* точки.



Чертежъ 90.

Если движущаяся точка остается *въ одной плоскости*, то, принимая эту плоскость за плоскость XOY, мы опредѣляемъ движеніе двумя уравненіями:

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2_1)$$

третье уравненіе $z = 0$ можно не писать.

Исключая изъ этихъ уравненій t, находимъ уравненіе траекторіи точки:

$$y = f(x).$$

Если мы не съумѣемъ исключить t изъ уравненій (2_1), то можемъ построить траекторію по точкамъ, пользуясь этими урав-

неніями; съ помощью тѣхъ же уравненій (2) можно и изслѣдовать траекторію.

Примѣры:

1. $$x=\alpha t\,,$$
$$y=\beta t+\frac{gt^2}{2}.$$

Траекторія:

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{g}{2\alpha^2}x^2.$$

парабола.

2. $$x=a.\cos kt\,,$$
$$y=a.\sin kt\,,$$
$$z=ct\,.$$

Уравненія траекторіи:

$$x^2+y^2=a^2,$$
$$z=\frac{c}{k}\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$$

Траекторія - винтовая линія.

Замѣтимъ, что для опредѣленія положенія точки нерѣдко, вмѣсто прямоугольныхъ координатъ, берутся другія координаты, напримѣръ, координаты полярныя.

Примѣръ:

$$r=\alpha.t\,,$$
$$\varphi=k.t\,;$$

траекторія

$$r=\frac{\alpha}{k}\varphi.$$

архимедова спираль.

§ 2. *Скорость точки.*

Средняя скорость точки за промежутокъ времени отъ момента t_1 *до момента* t_2 $(t_2 > t_1)$ *есть отношенiе длины пути* (l)*, пройденнаго точкою въ теченiе этого промежутка, къ величинѣ промежутка:*

средняя скорость отъ t_1 до t_2 равна

$$\frac{l}{t_2 - t_1}.$$

Если за время отъ t_1 до t_2 точка *не измѣняетъ* направленiя своего движенiя, то средняя скорость за этотъ промежутокъ времени равна абсолютной величинѣ отношенiя:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

гдѣ s_1 и s_2 суть значенiя s, соотвѣтствующiя моментамъ t_1 и t_2; въ такомъ видѣ *нельзя* представить средней скорости за промежутокъ отъ t_1 до t_2, если въ теченiе его направленiе движенiя измѣнялось.

Единица средней скорости есть единица *составная*, символическое обозначенiе которой будетъ:

$$\frac{\text{един. дл.}}{\text{един. вр.}}, \text{ или } LT^{-1},$$

если условимся единицу длины обозначать черезъ L, а единицу времени - черезъ T; принимая за единицу длины сантиметръ C, а за единицу времени секунду S, мы будемъ имѣть единицу средней скорости, равную

$$CS^{-1}.$$

Если средняя скорость остается *постоянною,* движенiе точки называется *равномѣрнымъ;* общее уравненiе равномѣрнаго движе-

нія будетъ:

$$s = a + bt.$$

гдѣ a и b величины постоянныя; траекторія точки при этомъ можетъ быть какая угодно.

Средняя скорость, равная *единицѣ*, получается при равномѣрномъ движеніи точки, которая въ единицу времени проходитъ единицу длины; уравненіе такого движенія будетъ:

$$s = t.$$

Опредѣленіе. Величина (v) *скорости точки въ моментъ* t *есть предѣлъ, къ которому стремится средняя скорость точки за промежутокъ времени, начинающійся въ моментъ* t *(или общѣе, заключающій въ себѣ моментъ* t *), при уменьшеніи этого промежутка до нуля.*

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *величина скорости точки въ моментъ* t *равна абсолютной величинѣ производной* $\left|\frac{ds}{dt}\right|$:

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right| \text{*)} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Доказательство. Пусть Δt,**) промежутокъ времени, слѣдующій за моментомъ t и достаточно малый для того, чтобы направленіе движенія точки въ теченіе этого промежутка *не измѣнялось;* моментамъ t и $t+\Delta t$ соотвѣтствуютъ значенія s и $s+\Delta s$; тогда средняя скорость равна $\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$, но s есть функція отъ t:

$$s = f(t);$$

слѣдовательно:

---

*) *Для обозначенія абсолютной величины какого либо выраженія далѣе мы будемъ ставить это выраженіе въ прямыхъ скобкахъ* $|\;|$.

**) Δ *есть греческая большая буква "дельта" и* Δt *читается: "дельта* t*"; буква* Δ *часто употребляется для обозначенія безконечно-малаго приращенія какой либо перемѣнн. величины.*

$$\text{Предѣлъ}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{\Delta t=0} = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$v = \left|f'(t)\right|. \text{*)}$$

Знакъ производной показываетъ въ какую сторону точка движется въ моментъ t : если $\frac{ds}{dt}>0$, точка движется въ сторону возрастанія s , если же $\frac{ds}{dt}<0$, точка движется въ сторону убыванія s.

При равномѣрномъ движеніи скорость точки въ каждый моментъ одна и та же и равна средней скорости:

$$s = a + b.t\ ;$$

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|b\right|.$$

Для *нагляднаго представленія* величинъ скорости точки въ различные моменты служитъ ***кривая скоростей,*** которая строится слѣдующимъ образомъ:

откладываемъ въ избранномъ масштабѣ по оси абсциссъ (OX) числа t, по оси ординатъ (OY) соотвѣтствующія значенія производной $\frac{ds}{dt}$ геометрическое мѣсто опредѣляемыхъ такимъ образомъ точекъ на плоскости и будетъ кривою скоростей.

Уравненіе кривой скоростей въ координатахъ x и y получается изъ уравненія:

---

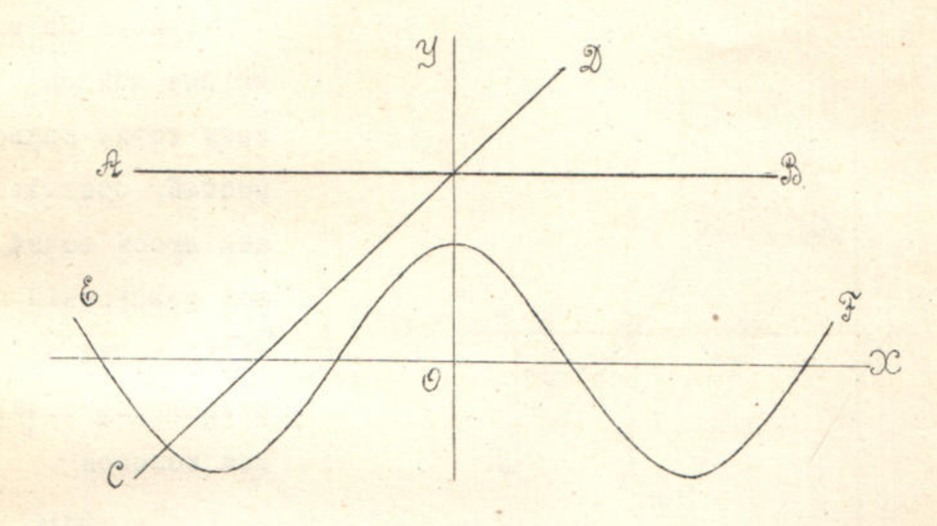
*) *Для сокращенія письма мы нерѣдко будемъ обозначать первыя производныя по t однимъ значкомъ $'$, вторыя - двумя значками $''$, такъ что:*

$$s' = \frac{ds}{dt}\ ,\quad f'(t) = \frac{df(t)}{dt}\ ,$$

$$s'' = \frac{d^2s}{dt^2}\ ,\quad f''(t) = \frac{d^2f(t)}{dt^2},\ \text{и т. д.}$$

$$\frac{ds}{dt} = f'(t),$$

если замѣнить въ немъ $\frac{ds}{dt}$ черезъ y , а t черезъ x .



Чертежъ 91.

На чертежѣ 91 изображены кривыя скоростей для движенiй, уравненiя которыхъ суть:

$$s = a + b.t \text{ (при } b > 0) \ldots\ldots\ldots\ldots AB,$$

$$s = a + b.t + c.t^2 \text{ (при } b > 0,\ c > 0) \ldots CD,$$

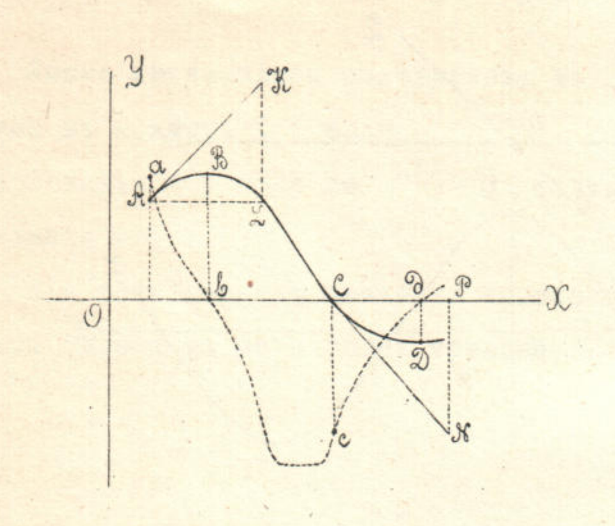
$$s = a.\sin kt \text{ (при } a > 0) \ldots\ldots\ldots\ldots EF.$$

Замѣтимъ, что производная $\frac{ds}{dt}$ равна tangens'у угла, образуемаго касательною къ кривой разстоянiй съ осью OX ; поэтому *кривую скоростей можно построить, имѣя только кривую разстоянiй.*

Пусть AD (черт.92) кривая разстоянiй. Проводимъ въ точкѣ A касательную (AK) и прямую AL , параллельную оси OX, равную единицѣ длины; изъ точки L проводимъ затѣмъ прямую $LK \parallel OY$ до пересѣченiя съ касательной въ точкѣ K ; тогда

$$LK = tg\angle KAL,$$

и слѣдовательно, ордината точки кривой скоростей, соотвѣтствующей тому же моменту времени, что и A, будетъ равна LK; такимъ образомъ находимъ точку a.



Чертежъ 92.

Такимъ же построеніемъ найдемъ ординату точки кривой скоростей, соотвѣтствующей любой точкѣ кривой разстояній, напримѣръ, точкѣ C соотвѣтствуетъ точка c, для которой

$$Cc = PN$$

(CN касательная къ AD въ точкѣ C, CP = единицѣ длины, $PN \| OY$); для точекъ B и D, гдѣ касательныя къ кривой разстояній параллельны оси OX, ординаты соотвѣтствующихъ точекъ b и d равны нулю.

Геометрическое мѣсто точекъ a, b, c, d и будетъ кривая скоростей.

Скорости точки въ моментъ t, *кромѣ величины, приписывается нѣкоторое направленіе.*



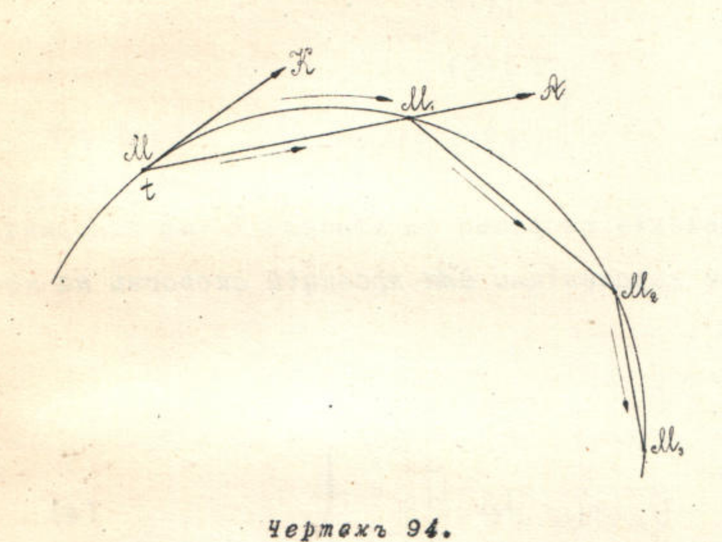
Чертежъ 93.

При *прямолинейномъ* движеніи отрѣзокъ, изображающій величину скорости въ избранномъ масштабѣ, естественно направить отъ положенія точки по траекторіи въ сторону движенія (черт.93).

Отсюда уже будетъ слѣдовать, что *при криволинейномъ движеніи отрѣзокъ, изображающій величину скорости, нужно откладывать отъ положенія точки по касательной къ траекторіи въ*

сторону движенія.

Выводъ. Криволинейное движеніе точки M можно разсматривать, какъ *предѣльный случай* ряда прямолинейныхъ равномѣрныхъ движеній по сторонамъ вписаннаго многоугольника при томъ условіи, чтобы въ вершины M_1, M_2, M_3, M_4.........точка приходила въ одно и то же время, какъ при криволинейномъ, такъ и при прямолинейномъ движеніи (черт.94).



Чертежъ 94.

Скорость точки M въ прямолинейномъ движеніи MM_1 направлена по сѣкущей MA; когда, увеличивая число сторонъ, мы перейдемъ къ предѣлу, эта сѣкущая обратится въ касательную MK, по которой и будетъ направлена скорость точки M въ криволинейномъ движеніи.

На основаніи всего сказаннаго нетрудно найти *величину* и *направленіе скорости въ моментъ* t, если движеніе опредѣляется по первому способу, т.е. дается *траекторія* и *уравненіе движенія:* по уравненію

$$s = f(t),$$

находимъ положеніе точки M въ моментъ t на данной траекто-

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. МЕЩЕРСКІЙ.
Изданіе Кассы Взаимопомощи Студ. СПБ. Политехн. Института.
Типо-литографія И. Трофимова. СПБ. Можайская, 3.
Корректоръ А. Сабанѣевъ. Листъ 9.

ріи, проводимъ касательную къ траекторіи въ сторону движенія и откладываемъ отрѣзокъ:

$$MK = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |f'(t)| .$$

Если движеніе точки опредѣляется по второму способу, т.е. даются *уравненія:*

$$x = f_1(t) ,$$

$$y = f_2(t) ,$$

$$z = f_3(t) ,$$

то *величину и направленіе скорости въ моментъ* t мы находимъ, пользуясь слѣдующими *выраженіями для проекцій скорости на координатныя оси:*

$$\left.\begin{aligned} v.\cos(v,X) &= \frac{dx}{dt} , \\ v.\cos(v,Y) &= \frac{dy}{dt} , \\ v.\cos(v,Z) &= \frac{dz}{dt} . \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Выводъ формулъ (4).

Пусть M и M_1 (черт.94) положенія движущейся точки въ моменты t и $t+\Delta t$, координаты ихъ x, y , z и $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$.

Проекціи хорды MM_1 на координатныя оси будутъ:

$$\Delta x \ , \Delta y \ , \Delta z \ .$$

Скорость точки M въ прямолинейномъ равномѣрномъ движеніи по хордѣ MM_1 будетъ

$$MA = \frac{\text{хорда } MM_1}{\Delta t} ;$$

проекціи этой скорости равны

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} , \frac{\Delta y}{\Delta t} , \frac{\Delta z}{\Delta t} ;$$

отсюда слѣдуетъ, что проекціи скорости MK въ криволинейномъ движеніи точки M будутъ:

$$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \frac{dx}{dt} \; ;$$

$$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \frac{dy}{dt} \; ;$$

$$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \frac{dz}{dt} \; ;$$

Изъ формулъ (4) слѣдуютъ формулы (5) для величины и направленія скорости:

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ \cos(v, X) &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \; ; \\ \cos(v, Y) &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \; ; \\ \cos(v, Z) &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \; . \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Если движущаяся точка остается *въ одной плоскости*, то, принимая эту плоскость за плоскость XOY, величину и направленіе скорости мы опредѣлимъ по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \; , \\ \cos(v, X) &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \; ; \\ \cos(v, Y) &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \; . \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Если *заданы*: *скорость* точки (ея величина и направленіе или проекціи на координатныя оси) для *каждаго* момента времени t и, кромѣ того, *положеніе* точки въ одинъ опредѣленный моментъ t_0 ,

то мы можемъ опредѣлить *движеніе* точки съ помощью *интегрированія*.

Примѣры.

Дано: величина скорости постоянна: $v=a$; уголъ φ, который ея направленіе составляетъ съ осью OX, возрастаетъ пропорціонально времени:

$$\varphi=k.t;$$

въ моментъ $t=0$, точка находится въ началѣ координатъ.

Опредѣлимъ движеніе точки. Имѣемъ:

$$x'=a.\cos kt;$$

$$y'=a.\sin kt;$$

отсюда

$$x=\frac{a}{k}\sin kt+\text{пост.};$$

$$y=-\frac{a}{k}\cos kt+\text{пост.};$$

но при $t=0$

$$x_0=0,$$

$$y_0=0,$$

слѣдовательно, первая постоянная равна нулю, вторая $=\frac{a}{k}$; и мы получаемъ уравненія движенія точки

$$x=\frac{a}{k}\sin kt,$$

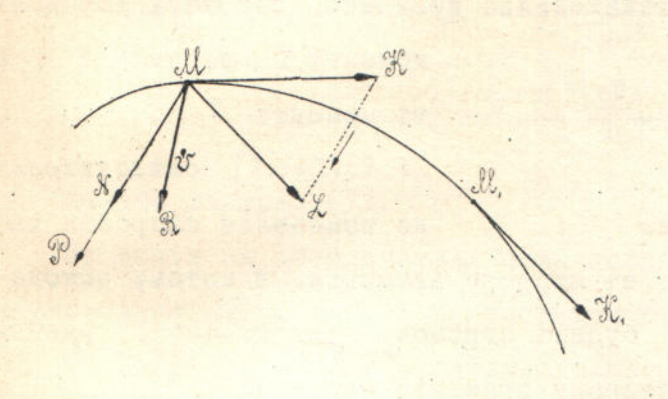
$$y=\frac{a}{k}(1-\cos kt).$$

§ 3. *Ускореніе точки*.

При всякомъ движеніи точки, кромѣ движенія прямолинейнаго и равномѣрнаго, скорость *измѣняется* или по величинѣ, или по направленію, или и по величинѣ и по направленію.

Пусть скорость точки въ моментъ t будетъ MK, а въ мо-

ментъ $t+\Delta t$ будетъ M_1K_1 (черт. 95); проведемъ прямую ML, равную по величинѣ и направленію M_1K_1; соединимъ точки K и L, тогда прямая KL, направленная отъ K къ L, будетъ *геометрическая разность* между скоростью M_1K_1 и скоростью MK, такъ какъ геометрическая сумма $\overline{MK}+\overline{KL}=\overline{ML}=\overline{M_1K_1}$; прямая MN, имѣющая ту же величину и то же направленіе, что и KL, называется *измѣненіемъ скорости точки* за время отъ t до $t+\Delta t$.



Чертежъ 95.

Отношеніе измѣненія скорости точки къ величинѣ соотвѣтствующаго промежутка $\frac{MN}{\Delta t}$ изображено на чертежѣ прямою MP.

Опредѣленіе.

Ускореніе точки въ моментъ t есть предѣлъ, къ которому стремится отношеніе измѣненія скорости точки за промежутокъ времени, начинающійся въ моментъ t (или общѣе, заключающій въ себѣ моментъ t), къ величинѣ этого промежутка при уменьшеніи его до нуля.

Пусть

$$MR = \text{пред.}\,(MP)_{\Delta t=0}\,,$$

тогда ускореніе, которое мы обозначимъ черезъ ϑ, будетъ:

$$\vartheta = MR\,.$$

по величинѣ и направленію.

Единица ускоренія есть единица составная; символическое обозначеніе ея будетъ:

$$\text{един. ускор.} = \frac{\text{ед. скор.}}{\text{ед. врем.}} = \frac{\text{ед. длины}}{(\text{ед. врем.})^2} = L.T^{-2}$$

Въ *прямолинейномъ* движеніи, уравненіе котораго есть

$$s = ct^2,$$

гдѣ c - постоянная положительная величина, скорость точки въ моментъ t равна $2ct$, а въ моментъ $t+\Delta t$ ....$2c(t+\Delta t)$ слѣдовательно измѣненіе скорости равно $2c\Delta t$ и направлено въ сторону движенія, а потому *ускореніе* точки въ моментъ t будетъ отрѣзокъ прямой MA, равный $2c$ и направленный въ сторону движенія (черт.96).

O M v A

Чертежъ 96.

Прямолинейное движеніе, въ которомъ ускореніе въ каждый моментъ имѣетъ одну и ту же величину, называется *равноускореннымъ движеніемъ:*

Общее уравненіе равноускореннаго движенія есть

$$s = a + bt + ct^2,$$

гдѣ a, b и c величины постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ скорость точки въ моментъ t равна $|b+2ct|$, въ моментъ $t+\Delta t$ ....$|b+2c(t+\Delta t)|$; слѣдовательно, измѣненіе скорости равно $2c\Delta t$, а потому величина ускоренія будетъ $|2c|$.

Ускореніе, *равное единицѣ,* получается при прямолинейномъ равноускоренномъ движеніи, когда точка, выйдя изъ состоянія покоя, въ первую единицу времени (напримѣръ, въ первую секунду) пройдетъ *половину* единицы длины (напримѣръ, $\frac{1}{2}$ сантиметра): уравненіе такого движенія можетъ быть написано въ видѣ

$$s = \frac{1}{2}t^2;$$

слѣдовательно:

$$\dot{v} = 1.$$

Проекціи ускоренія точки на координатныя оси выражаются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} v\cdot\cos(v,X) &= \frac{d^2x}{dt^2}, \\ v\cdot\cos(v,Y) &= \frac{d^2y}{dt^2}, \\ v\cdot\cos(v,Z) &= \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Выводъ формулъ (7).

Проекціи на координатныя оси скорости MK (черт.95) суть производныя: x', y', z'; проекціи скорости M_1K_1 будутъ $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$; слѣдовательно, проекціи прямой KL, а также и измѣненія скорости MN будутъ Δx, Δy, Δz, а такъ какъ

$$MP = \frac{MN}{\Delta t},$$

то проекціи MP будутъ

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t}, \frac{\Delta y'}{\Delta t}, \frac{\Delta z'}{\Delta t};$$

отсюда слѣдуетъ, что проекціи ускоренія MR на координатныя оси равны:

$$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta y'}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta z'}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Изъ формулъ (7) слѣдуютъ выраженія, опредѣляющія *величину и направленіе ускоренія* точки въ моментъ t:

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}, \\ \cos(v,X) &= \frac{x''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}, \\ \cos(v,Y) &= \frac{y''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}, \\ \cos(v,Z) &= \frac{z''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Если движущаяся точка остается *въ одной плоскости*, то, принимая эту плоскость за плоскость XOY, *величину и направленіе ускоренія* мы опредѣлимъ по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} &= \sqrt{x''^2 + y''^2}\,, \\ \cos(\dot{v}, X) &= \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}\,, \\ \cos(\dot{v}, Y) &= \frac{y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Если точка движется *по прямой линіи*, то, принимая эту прямую за ось OX, *величину и направленіе ускоренія* мы опредѣлимъ съ помощью формулы:

$$\dot{v}.\cos(\dot{v}; X) = \frac{d^2x}{dt^2}\;;$$

откуда

$$\dot{v} = \left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|\,,$$

$$\cos(\dot{v}, X) = 1\,,$$

т.е. ускореніе направлено въ положительную сторону оси OX, если $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$, и

$$\cos(\dot{v}, X) = -1\,,$$

т.е. ускореніе направлено въ отрицательную сторону оси OX, если $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$.

Вводя прежнее обозначеніе s, вмѣсто x, мы получимъ, что въ *прямолинейномъ движеніи* ускореніе точки равно абсолютной величинѣ второй производной отъ s по t:

$$\dot{v} = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

и направлено въ положительную сторону траекторіи, если $\frac{d^2s}{dt^2} > 0$, - въ отрицательную сторону, если $\frac{d^2s}{dt^2} < 0$.

Примѣръ.

Найдемъ ускореніе точки въ равномѣрномъ движеніи ея по окружности (черт.97):

$$x = a.\cos kt\ ,$$

$$y = a.\sin kt\ .$$

Получаемъ:

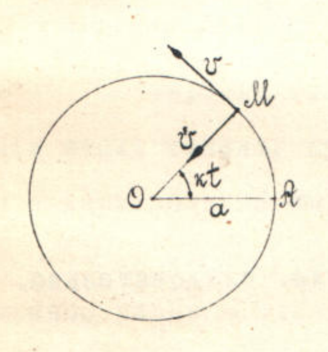
$$x'' = -a.k^2\cos kt\ ,$$

$$y'' = -ak^2\sin kt\ ,$$

слѣдовательно, ускореніе имѣетъ постоянную величину

$$\vartheta = a.k^2,$$

и направлено по радіусу точки къ центру окружности.



Чертежъ 97.

Если *заданы: ускореніе* точки (его величина и направленіе или проекціи на координатныя оси) для каждаго момента времени t , кромѣ того, положеніе и скорость точки въ *одинъ* опредѣленный моментъ, то мы можемъ съ помощью интегрированія опредѣлить сначала скорость точки, а затѣмъ и *движеніе* точки.

Примѣръ.

Дано: ускореніе постоянно по величинѣ и направленію - оно равно g (напримѣръ, $g = 981\,\frac{\text{сант.}}{(\text{сек})^2}$) и направлено по вертикали внизъ; въ моментъ $t = 0$ точка находится въ началѣ координатъ и имѣетъ скорость a , составляющую уголъ α съ горизонтомъ (черт.98).

Опредѣлить скорость и движеніе точки.

Пусть ось OX горизонтальна, ось OY направлена по вертикали внизъ.

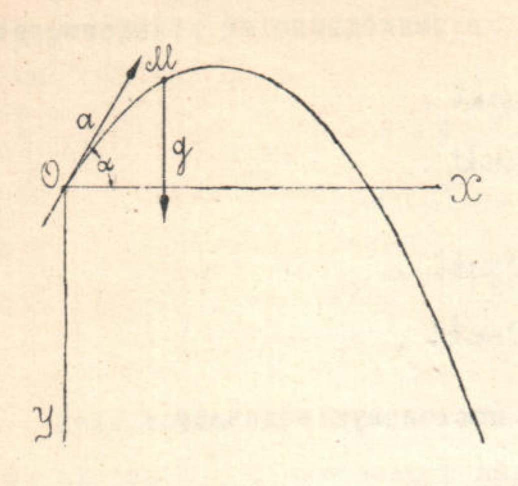
Имѣемъ:

$$x'' = 0 \quad , \quad y'' = g \; ;$$

при $t = 0$

$$x_0 = 0 \; ,$$
$$y_0 = 0 \; ;$$

$$x_0' = a.\cos\alpha \; ,$$
$$y_0' = a.\sin\alpha \; ;$$



Чертежъ 98.

находимъ:

$$x' = \text{пост.},$$
$$y' = g.t + \text{пост.};$$

слѣдовательно:

$$x' = a.\cos a \; ,$$
$$y' = g.t + a.\sin\alpha \; ;$$

отсюда

$$x = a.t.\cos\alpha + \text{пост.},$$
$$y = \tfrac{1}{2}g.t^2 + a.t.\sin\alpha + \text{пост.};$$

но эти постоянныя должны бнть равны нулю, слѣдовательно, находимъ:

$$x = a.t.\cos a \; ,$$
$$y = a.t.\sin\alpha + \tfrac{1}{2}g.t^2 \; ,$$

траекторія точки - парабола.

§ 4. *Поступательное движенiе твердаго тѣла.*

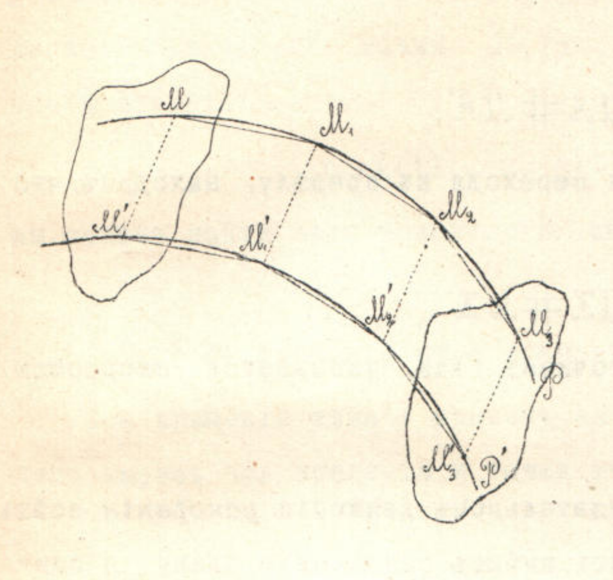
Тѣло движется *поступательно тогда, когда двѣ какія либо пересѣкающіяся плоскости, проведенныя черезъ точки тѣла, остаются при движеніи тѣла себѣ параллельными.*

Отсюда слѣдуетъ, что при поступательномъ движеніи тѣла, *всякая плоскость*, проведенная черезъ точки тѣла, остается себѣ *параллельною,* а потому и *всякая прямая,* проведенная черезъ

точки тѣла, также остается себѣ *параллельною.*

Разсмотримъ траекторіи, скорости и ускоренія точекъ тѣла.

1. *Траекторіи.* При поступательномъ движеніи *траекторіи* всѣхъ точекъ тѣла суть *тождественныя линіи,* т. е. такія, которыя при наложеніи могутъ быть совмѣщаемы другъ съ другомъ (черт. 99).

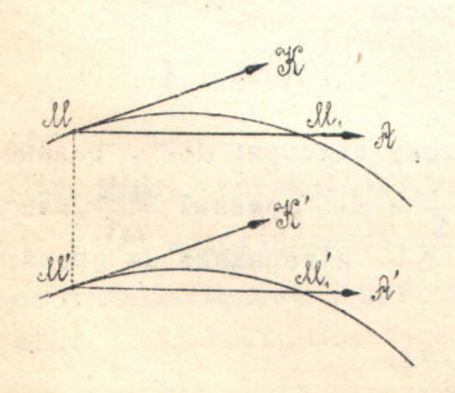


Чертежъ 99.

Доказательство.

Пусть MP и $M'P'$ - траекторіи точекъ M и M'; пусть M_1 и M_1', M_2 и M_2', M_3 и M_3'...... будутъ одновременныя положенія этихъ точекъ; прямыя MM', M_1M_1', M_2M_2', M_3M_3'...... равны и параллельны, слѣдовательно, стороны многоугольниковъ MM_1, M_1M_2, M_2M_3, ... и $M'M_1'$, $M_1'M_2'$, $M_2'M_3'$, ... соотвѣтственно равны и параллельны; увеличивая число сторонъ многоугольниковъ и переходя къ предѣлу, получаемъ высказанную теорему.

2. *Скорости.* При поступательномъ движеніи *скорости* всѣхъ точекъ тѣла въ каждый моментъ имѣютъ одинаковую величину и одинаковое направленіе.



Чертежъ 100.

Доказательство.

Пусть M и M' положенія двухъ точекъ тѣла въ моментъ t, M_1 и M_1', - положенія ихъ въ моментъ $t+\Delta t$ (черт.100); пусть

$$\mathcal{MA} = \frac{\mathcal{MM}_1}{\Delta t},$$

$$\mathcal{M'A'} = \frac{\mathcal{M'M'_1}}{\Delta t};$$

тогда

$$\mathcal{MA} \# \mathcal{MA'};$$

уменьшая промежутокъ Δt и переходя къ предѣлу, находимъ, что скорости:

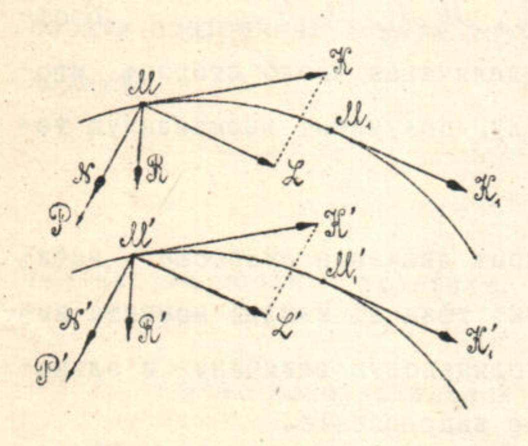
$$\mathcal{MK} \# \mathcal{M'K'}.$$

Скорость, общая всѣмъ точкамъ тѣла, называется *скоростъю тѣла.*

3. *Ускоренія.* При поступательномъ движеніи *ускоренія* всѣхъ точекъ тѣла въ каждый моментъ имѣютъ одинаковую длину и одинаковое направленіе.

Доказательство.

Скорости двухъ точекъ въ моментъ t (черт.101)



Чертежъ 101.

$$\mathcal{MK} \# \mathcal{M'K'}$$

и въ моментъ $t + \Delta t$

$$\mathcal{M_1K_1} \# \mathcal{M'_1K'_1};$$

слѣдовательно, и измѣненія скорости

$$\mathcal{MN} \# \mathcal{M'N'}; \text{ *)}$$

поэтому векторы: $\mathcal{MP}$, равный $\frac{\mathcal{MN}}{\Delta t}$ и $\mathcal{M'P'}$, равный $\frac{\mathcal{M'N'}}{\Delta t}$, равны и одинаково направлены; уменьшая Δt и переходя къ предѣлу, находимъ, что ускоренія

$$\mathcal{MR} \# \mathcal{M'R'}.$$

---

*) $\mathcal{MN} \# \mathcal{KL}$, $\mathcal{M'N'} \# \mathcal{K'L'}$.

Ускореніе, общее всѣмъ точкамъ тѣла, называется *ускореніемъ тѣла.*

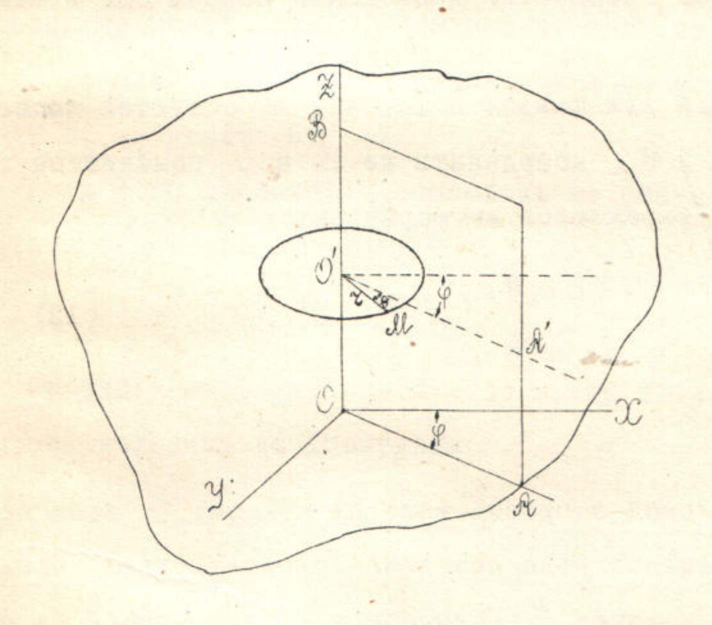
Такимъ образомъ, *поступательное движеніе тѣла вполнѣ опредѣляется движеніемъ одной изъ его точекъ;* - имѣя уравненіе движенія какой либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ тѣла, движущагося поступательно:

$$x_0 = f_1(t) \ , \ y_0 = f_2(t) \ , \ z_0 = f_3(t) \ ,$$

мы можемъ найти видъ траекторіи, скорость и ускореніе тѣла.

§ 5. *Вращеніе тѣла вокругъ неподвижной оси.*

Ось вращенія тѣла*) примемъ за ось OZ (черт.102); проведемъ черезъ ось вращенія и точки тѣла какую либо плоскость AB; уголъ, составляемый этой плоскостью съ плоскостью ZOX т.е. $\angle AOX$, называется *"уголъ поворота"* тѣла; обозначимъ черезъ φ величину угла поворота, выраженную въ частяхъ радіуса и взятую со знакомъ *плюсъ*, когда уголъ отсчитывается отъ положительной оси OX, къ положительной оси OY, т.е. по часовой стрѣлкѣ, и со знакомъ *минусъ* - при отсчетѣ въ противоположную сторону.



Чертежъ 102.

---

*) *Предполагаемъ, что ось вращенія или принадлежитъ тѣлу или разсматривается, какъ неизмѣнно съ нимъ связанная.*

Уравненіе:

$$\varphi = f(t), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

гдѣ $f(t)$ - извѣстная функція отъ времени t, вполнѣ *опредѣляетъ движеніе тѣла.*

Разсмотримъ траекторіи, скорости и ускоренія точекъ тѣла.

1. *Траекторіи.* При вращеніи тѣла около оси *траекторія* каждой точки M тѣла есть дуга окружности круга, плоскость котораго перпендикулярна къ оси вращенія, центръ лежитъ на оси, а радіусъ равенъ кратчайшему разстоянію r точки до оси.

Пусть $OX' \parallel OX$, $OA' \parallel OA$; уголъ $A'O'M$ обозначимъ черезъ θ; уголъ θ имѣетъ одну и ту же величину для точекъ тѣла, лежащихъ въ одной плоскости, проходящей черезъ ось вращенія.

При вращеніи тѣла для каждой его точки M остаются *постоянными* величины: z, r и θ; координаты же x и y измѣняются съ теченіемъ времени и выражаются по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r.\cos(\theta+\varphi), \\ y &= r.\sin(\theta+\varphi). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

2. *Скорости.*

Опредѣленіе. Угловая скорость тѣла въ моментъ t *есть предѣлъ отношенія приращенія угла поворота за промежутокъ времени, начинающійся въ моментъ* t *(или общѣе - заключающій въ себѣ моментъ* t *), къ величинѣ этого промежутка, при уменьшеніи его до нуля.*

Величина угловой скорости (ω) равна абсолютной величинѣ первой производной отъ угла поворота по времени:

$$\omega = \text{Пред.}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|_{\Delta t=0} = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Знакъ производной $\frac{d\varphi}{dt}$ указываетъ, въ какую сторону въ мо-

ментъ t тѣло вращается: наблюдатель, помѣщенный такъ, что ось Oz проходитъ отъ ногъ къ головѣ, видитъ тѣло вращающимся слѣва направо, когда $\frac{d\varphi}{dt}>0$ и справа налѣво, когда $\frac{d\varphi}{dt}<0$

Единица угловой скорости:

$$\frac{\text{ед. отвлеч.}}{\text{ед. врем.}}=\frac{1}{\text{ед. врем.}}=T^{-1}.$$

Вращеніе называется *равномѣрнымъ,* если угловая скорость *постоянна.*

Уравненіе равномѣрнаго вращенія будетъ:

$$\varphi=\alpha+\beta.t,$$

гдѣ α и β - величины постоянныя.

Угловая скорость, *равная единицѣ,* получается при равномѣрномъ вращеніи тѣла, когда оно въ единицу времени (напримѣръ, въ одну секунду) поворачивается на уголъ, равный единицѣ, т.е. *на уголъ: 57° 17'.*

Если тѣло дѣлаетъ n оборотовъ въ секунду, то угловая скорость его равна:

$$2n\pi\cdot\frac{1}{\text{сек.}}.$$

Проекціи *скорости какой либо точки* тѣла M на координатныя оси находимъ по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} v.\cos(v,X)&=-y.\varphi', \\ v.\cos(v,Y)&=x.\varphi', \\ v.\cos(v,Z)&=0. \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots\dots(13)$$

Эти формулы получаются дифференцированіемъ по времени формулъ (12) и уравненія $z=\text{пост.}$

$$\left.\begin{aligned} x'&=-r.\sin(\theta+\varphi).\varphi'=-y.\varphi', \\ y'&=r.\cos(\theta+\varphi).\varphi'=x.\varphi', \\ z'&=0. \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(13_1)$$

Изъ формулъ (13) слѣдуетъ:

$$v=\sqrt{x^2+y^2}\cdot|\varphi'|=r.\omega ,$$

$$\cos(v,X)=-\frac{y}{r} ,$$

$$\cos(v,Y)=\frac{x}{r} ;$$

такъ какъ

$$\cos(O'M,X)=\frac{x}{r} ,$$

$$\cos(O'M,Y)=\frac{y}{r} ,$$

то

$$\cos(v,O'M)=0 ,$$

слѣдовательно, $v\perp O'M$; кромѣ того, очевидно, скорость точки, координаты которой суть $x=1$, $y=0$, направлена по положительной оси OY , если $\varphi'>0$, и по отрицательной оси OY , если $\varphi'<0$.

Такимъ образомъ, изъ формулъ (13) приходимъ къ слѣдующему заключенію:

При вращеніи тѣла около оси скорость всякой точки равна произведенію угловой скорости на кратчайшее разстояніе точки до оси ($v=r.\omega$) *и направлена по перпендикуляру къ кратчайшему разстоянію въ сторону движенія часовой стрѣлки или въ сторону противоположную, смотря по знаку производной* φ' (ч.103)*).

Отсюда заключаемъ, что *угловая скорость* тѣла, вращающагося вокругъ оси, можетъ быть опредѣлена, какъ *отношеніе* скорости какой либо точки тѣла къ ея кратчайшему разстоянію до оси:

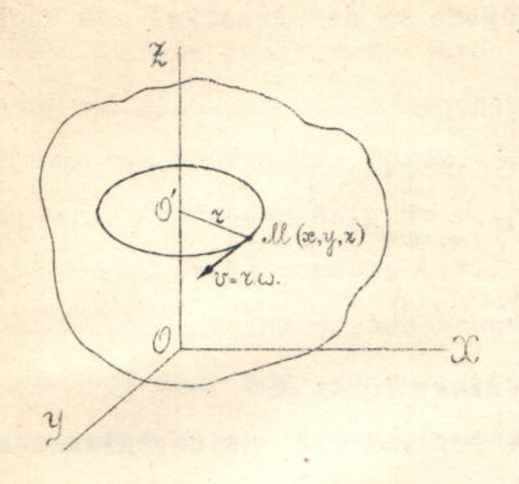
$$\omega=\frac{v}{r} .$$

3. *Ускоренія.*

Опредѣленіе. Угловое ускореніе тѣла въ моментъ t *есть*

---

*) *Это заключеніе о скорости вытекаетъ непосредственно изъ того, что сказано выше о траекторіи точки и объ угловой скорости тѣла.*



Чертежъ 103.

предѣлъ отношенія приращенія угловой скорости тѣла за промежутокъ времени, начинающійся въ моментъ t *(или общѣе, заключающій въ себѣ моментъ* t*), къ величинѣ этого промежутка, при уменьшеніи его до нуля.*

Величина углового ускоренія ($\dot{\omega}$) равна абсолютной величинѣ второй производной отъ угла поворота по времени, $\left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|$:

$$\dot{\omega} = \text{Пред.}\left|\frac{\Delta\varphi'}{\Delta t}\right|_{\Delta t=0} = \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| .$$

Проекціи ускоренія какой либо точки тѣла M *на координатныя оси находимъ по формуламъ:*

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}.\cos(\dot{v}, X) &= -y.\varphi'' - x.\varphi'^2, \\ \dot{v}.\cos(\dot{v}, Y) &= x.\varphi'' - y.\varphi'^2, \\ \dot{v}.\cos(\dot{v}, Z) &= 0 . \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Формулы (14) получаются дифференцированіемъ по времени t формулъ (13_1); онѣ показываютъ, что *ускореніе всякой точки тѣла равно геометрической суммѣ двухъ ускореній:* проекціи одного выражаются первыми членами правыхъ частей формулъ (14), а проекціи другого - ихъ вторыми членами*).

---

*) *См. примѣчаніе на стр. 85 "Статики".*

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. МЕЩЕРСКІЙ.
Изданіе Кассы Взаимопомощи Студ. СПБ. Политехн. Института.
Типо-литографія И. Трофимова. СПБ. Можайская, 3.
Корректоръ А. Сабанѣевъ   Листъ 10.

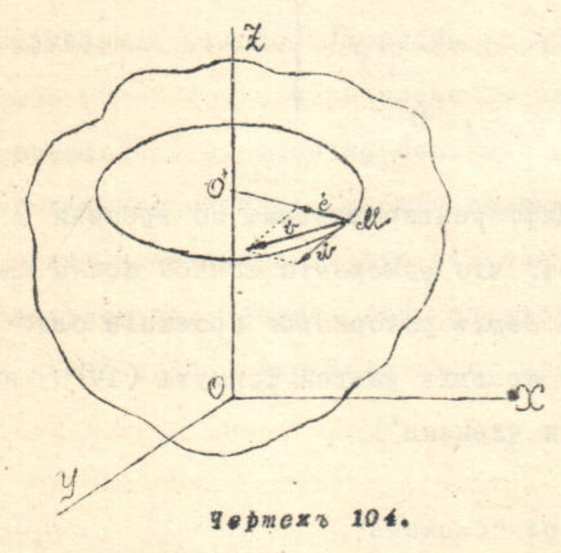
Ускореніе $\dot{w}$, проекціи котораго на координатныя оси выражаются по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{w}.\cos(\dot{w},X) &= -y\varphi'', \\ \dot{w}.\cos(\dot{w},Y) &= x.\varphi'', \\ \dot{w}.\cos(\dot{w},Z) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

называется *вращательнымъ ускореніемъ* точки M.

Тѣмъ же способомъ, какъ изъ формулъ (13) мы опредѣлили величину и направленіе скорости точки, изъ формулъ (15) мы находимъ, что *вращательное ускореніе* точки *по величинѣ равно произведенію углового ускоренія на кратчайшее разстояніе точки до оси* ($\dot{w}=r.\dot{\omega}$) *и направлено по перпендикуляру къ кратчайшему разстоянію въ сторону часовой стрѣлки, если* $\varphi''>0$, *и въ сторону противоположную, если* $\varphi''<0$ *(черт. 104).*

Ускореніе $\dot{c}$, проекціи котораго на координатныя оси выражаются по формуламъ:



Чертежъ 104.

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}.\cos(\dot{c},X) &= -x.\varphi'^2, \\ \dot{c}.\cos(\dot{c},Y) &= -y.\varphi'^2, \\ \dot{c}.\cos(\dot{c},Z) &= 0. \end{aligned}\right\} (16)$$

называется *центростремительнымъ ускореніемъ точки* M.

Изъ формулъ (16) слѣдуетъ:

$$\dot{c}=\sqrt{x^2+y^2}.\varphi'^2=r.\omega^2,$$

$$\dot{c}.\cos(\dot{c},X)=-\frac{x}{r},$$

$$\dot{c}.\cos(\dot{c},Y)=-\frac{y}{r},$$

слѣдовательно, ускореніе $\overset{\circ}{c}$ направлено противоположно OM. Такимъ образомъ получаемъ, что *центростремительное ускореніе точки по величинѣ равно произведенію квадрата угловой скорости тѣла на кратчайшее разстояніе точки до оси и направлено отъ точки по перпендикуляру къ оси:* $\dot{c} = r.\varphi'^2$.

На основаніи формулъ (14), (15) и (16) заключаемъ, что *ускореніе* ($\dot{v}$) *какой либо точки тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, есть геометрическая сумма двухъ ускореній: вращательнаго и центростремительнаго; поэтому ускореніе* $\dot{v}$ *изображается діагональю прямоугольника, построеннаго на ускореніяхъ* $\dot{w}$ *и* $\dot{c}$:

$$\dot{v} = r\sqrt{\varphi''^2 + \varphi'^4}\ .$$

§ 6. *Движеніе твердаго тѣла, параллельное неподвижной плоскости.*

Движеніе твердаго тѣла называется параллельнымъ неподвижной плоскости, если точки тѣла, лежащія въ нѣкоторый моментъ въ одной неподвижной плоскости, при движеніи тѣла остаются въ этой плоскости.

Очевидно, что тогда точки тѣла, лежащія въ *какой угодно* плоскости, параллельной неподвижной, остаются въ ней при движеніи тѣла.

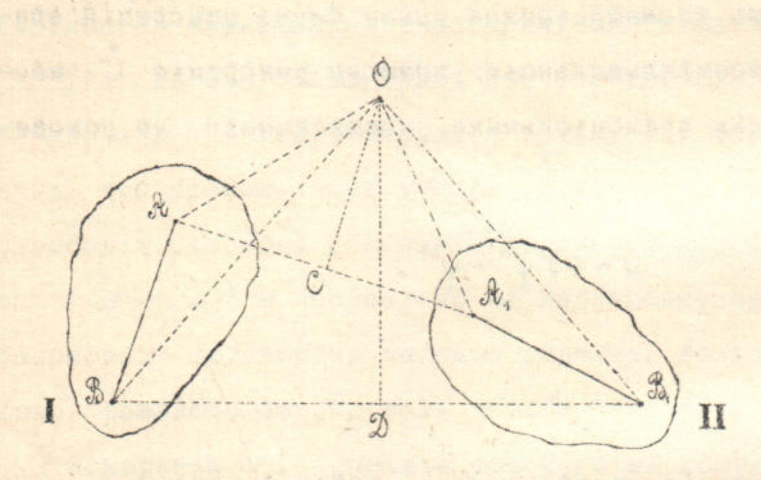
Движеніе всѣхъ точекъ тѣла, лежащихъ на одной прямой, перпендикулярной къ неподвижной плоскости, будетъ *тождественно*.

Поэтому для изученія движенія тѣла достаточно разсмотрѣть движеніе той *плоской неизмѣняемой фигуры,* которая получается при пересѣченіи тѣла неподвижною плоскостью.

ТЕОРЕМА. *Всякое положеніе неизмѣняемой плоской фигуры, дви-*

жущейся въ ея плоскости, можетъ быть получено изъ какого угодно другого ея положенія посредствомъ вращенія вокругъ нѣкоторой точки, если только оно не получается посредствомъ поступательнаго движенія.

Доказательство. Положеніе плоской фигуры будетъ опредѣлено, если извѣстно положеніе нѣкоторой прямой, принадлежащей этой фигурѣ.



Чертежъ 105.

Пусть AB и A_1B_1 (черт. 105) будутъ два положенія одной и той же прямой, принадлежащей фигурѣ при I и II положеніяхъ. Проведемъ прямыя AA_1 и BB_1 и въ срединахъ ихъ C и D возстановимъ перпендикуляры, - пусть они пересѣкаются въ точкѣ O. Соединимъ точку O съ точками A, B, A_1, B_1; тогда

$$OA = OA_1,$$

$$OB = OB_1.$$

Изъ равенства треугольниковъ AOB и A_1OB_1 слѣдуетъ, что

$$\angle AOB = \angle A_1OB_1;$$

а потому

$$\angle AOB + \angle BOA_1 = \angle A_1OB_1 + \angle BOA_1,$$

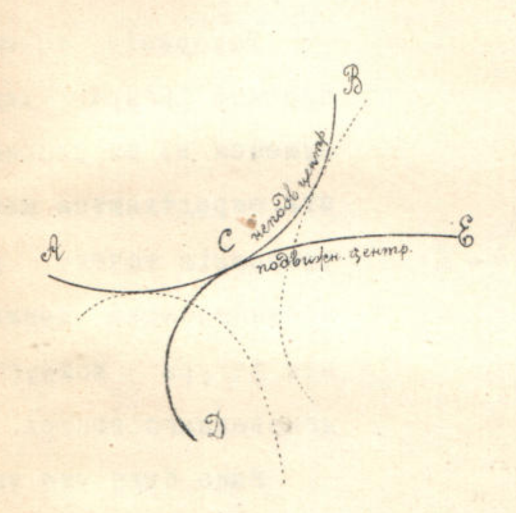
или

$$\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \varphi.$$

Отсюда заключаемъ, что при вращеніи фигуры вокругъ точки

O на уголъ φ, точка A придетъ въ A_1, а точка B въ B_1; слѣдовательно, изъ положенія I фигура перейдетъ въ положеніе II*).

Доказанная теорема имѣетъ мѣсто и тогда, когда положенія I и II плоской фигуры суть положенія *безконечно близкія,* и мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: *безконечно малое перемѣщеніе плоской фигуры въ ея плоскости можетъ быть получено вращеніемъ ея на безконечно малый уголъ вокругъ нѣкоторой точки.*



Чертежъ 106.

Эта точка въ различные моменты времени занимаетъ разныя положенія и потому называется *"мгновеннымъ центромъ"*.

При своемъ движеніи мгновенный центръ вычерчиваетъ на неподвижной плоскости нѣкоторую кривую, которая называется *"неподвижной центроидой"*; другую кривую онъ вычерчиваетъ на плоскости движущейся вмѣстѣ съ фигурой, - эта кривая называется *"подвижной центроидой"* (чертежъ 106).

Центроиды въ каждый моментъ имѣютъ общую точку касанія, которая служитъ мгновеннымъ центромъ для этого момента, и при движеніи тѣла подвижная центроида катится безъ скольженія по центроидѣ неподвижной.

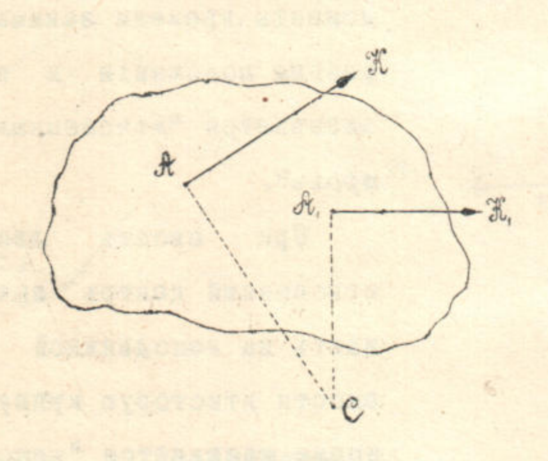
Скорости точекъ плоской фигуры въ каждый моментъ суть *вращательныя* скорости вокругъ мгновеннаго центра, слѣдовательно,

---

*) *ПРИМѢЧАНІЕ. Поступательное движеніе плоской фигуры можно разсматривать какъ вращеніе вокругъ безконечно удаленной точки, и тогда высказанное въ теоремѣ ограниченіе отпадаетъ.*

перпендикулярны къ линіямъ, соединяющимъ ихъ съ мгновеннымъ центромъ.

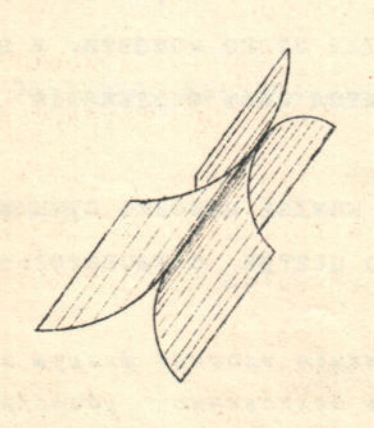
Поэтому, чтобы *построить мгновенный центръ* для даннаго момента, достаточно знать направленія скоростей въ этотъ моментъ двухъ точекъ (A и A_1) фигуры (черт.107): точка пересѣченія (C) перпендикуляровъ, возстановленныхъ въ этихъ точкахъ къ направленіямъ ихъ скоростей (AK и A_1K_1) и будетъ мгновенный центръ для даннаго момента.



Чертежъ 107.

Ускоренія точекъ плоской фигуры, движущейся въ ея плоскости, опредѣляются какъ ускоренія точекъ во *вращательномъ* движеніи фигуры вокругъ мгновеннаго центра.

Выше было уже указано, что при движеніи твердаго тѣла параллельномъ неподвижной плоскости, всѣ точки, лежащія на одномъ перпендикулярѣ къ этой плоскости, движутся совершенно одинаково; слѣдовательно, въ тѣлѣ въ каждый моментъ существуетъ безчисленное множество точекъ, скорость которыхъ равна нулю; эти точки лежатъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ къ плоскости фигуры въ мгновенномъ центрѣ; въ тѣлѣ существуетъ, такимъ образомъ, *мгновенная ось*.



Чертежъ 108.

Когда мгновенный центръ описываетъ центроиды, мгновенная ось описываетъ цилиндры, кото-

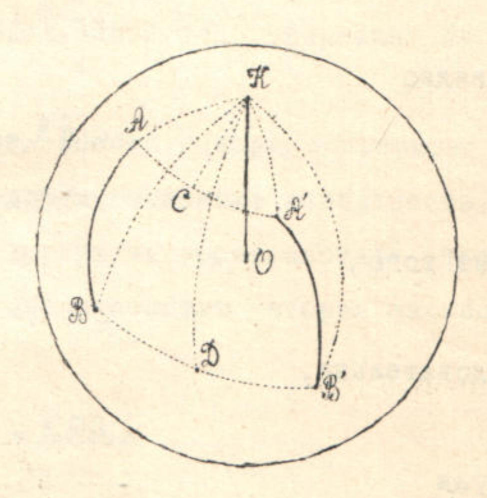
рые называются *аксоидами* (черт.108); одинъ изъ нихъ - *"подвижный аксоидъ"* - катится безъ скольженія по другому - *"неподвижному аксоиду"*.

§ 7. *Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.*

Когда тѣло имѣетъ неподвижную точку O, то положеніе тѣла будетъ вполнѣ опредѣлено, если будемъ знать положеніе двухъ какихъ нибудь точекъ A и B, не лежащихъ на одной прямой съ точкою O (черт.109).



Чертежъ 109.



Чертежъ 110.

ТЕОРЕМА. *При вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки всякое положеніе тѣла можетъ быть получено изъ какого-угодно другого положенія посредствомъ вращенія вокругъ нѣкоторой оси, проходящей черезъ неподвижную точку.*

Опишемъ изъ неподвижной точки O, какъ центра, поверхность шара, и возьмемъ на ней какую-либо дугу большого круга, принадлежащую тѣлу (черт.110); при перемѣщеніи тѣла эта дуга перемѣщается, оставаясь на поверхности шара; пусть AB и $A'B'$ будутъ ея положенія при первомъ и второмъ положеніяхъ тѣла; для доказательства теоремы достаточно показать, что AB приходитъ въ $A'B'$ при поворотѣ тѣла на нѣкоторый уголъ вокругъ нѣкоторой оси, проходящей черезъ точку O.

Доказательство аналогично тому, которое указано выше для случая движенія плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости (см. стр. 148) съ тою разницею, что здѣсь, вмѣсто прямыхъ, проводятся дуги большихъ круговъ:

$$\smile AC = \smile CA';$$

$$\smile BD = \smile DB';$$

$$\smile CK \perp \smile AA';$$

$$\smile DK \perp \smile BB'.$$

Очевидно

$$\smile AK = \smile A'K,$$

и

$$\smile BK = \smile B'K;$$

кромѣ того,

$$\smile AB = \smile A'B':$$

слѣдовательно,

$$\triangle ABK = \triangle A'B'K,$$

откуда

$$\angle AKB = \angle A'KB';$$

прибавляя по углу BKA', получимъ:

$$\angle BKB' = \angle AKA' = \varphi.$$

Такимъ образомъ, когда тѣло повернемъ вокругъ прямой OK на уголъ φ, т.е. такъ, чтобы точка A перешла въ A', то точка B перейдетъ въ B', и дуга AB займетъ положеніе $A'B'$.

Слѣдствіе. Теорема справедлива, какъ бы второе положеніе тѣла ни было близко къ положенію первому, слѣдовательно, какъ бы мало ни было разсматриваемое перемѣщеніе; поэтому теорема справедлива для *безконечно малаго перемѣщенія: безконечно малое перемѣщеніе тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, можетъ быть получено вращеніемъ тѣла на*

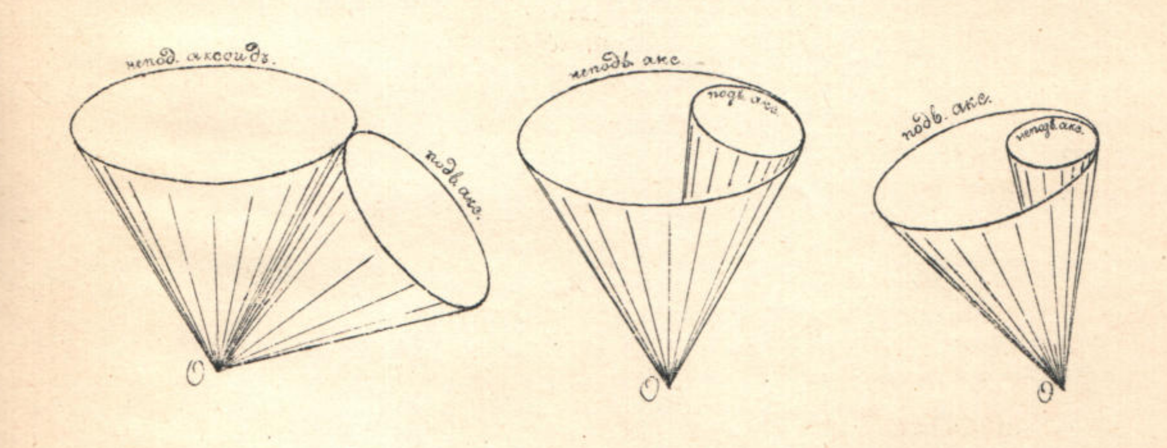
безконечно малый уголъ вокругъ нѣкоторой оси.

Эта ось проходитъ постоянно черезъ неподвижную точку, но въ различные моменты времени имѣетъ разныя направленія, и потому называется *мгновенной осью.*

Мгновенную ось для какого либо момента мы найдемъ, если, кромѣ закрѣпленной точки, будетъ извѣстна другая точка, скорость которой равна нулю.

Скорости и ускоренія точекъ тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, въ каждый моментъ мы можемъ опредѣлить такъ же, какъ при вращеніи около неподвижной оси, принимая за ось вращенія мгновенную ось.

Мгновенная ось, перемѣщаясь, вообще говоря, непрерывно съ теченіемъ времени, описываетъ двѣ *коническихъ* поверхности, одну въ самомъ движущемся тѣлѣ, другую въ пространствѣ: первая поверхность называется *подвижнымъ аксоидомъ,* вторая *неподвижнымъ аксоидомъ* (черт. 111).



Чертежъ 111.

Въ каждый моментъ оба аксоида имѣютъ общую производящую, которая и служитъ мгновенной осью для этого момента.

При вращеніи тѣла около неподвижной точки *подвижной аксоидъ катится безъ скольженія по аксоиду неподвижному.*

К И Н Е Т И К А.

(О с н о в н ы я   п о н я т і я).

ВВЕДЕНІЕ.

Кинетика, или, какъ ее нерѣдко называютъ, *динамика,* изучаетъ движеніе въ связи съ тѣми причинами, которыми оно обусловливается.

Одно изъ основныхъ понятій кинетики представляетъ понятіе о матеріальной точкѣ.

Матеріальная точка есть тѣло, размѣрами котораго пренебрегаемъ.

Такое пренебреженіе мы можемъ сдѣлать, напримѣръ, тогда, когда тѣло движется *поступательно.*

Положеніе матеріальной точки опредѣляется, подобно точкѣ математической, тремя координатами, а потому матеріальную точку можно разсматривать, какъ точку математическую, въ которой сосредоточено все вещество тѣла.

Понятіе о матеріальной точкѣ введено въ кинетику для *упрощенія* различныхъ вопросовъ о движеніи тѣла, такъ какъ, пренебрегая размѣрами тѣла, мы пренебрегаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ и его формою, и распредѣленіемъ въ немъ вещества.

Матеріальная точка называется *свободною,* когда въ занимаемомъ ею положеніи она можетъ имѣть скорость какой угодно величины и какого угодно направленія; въ противномъ случаѣ точка называется *несвободною.*

ГЛАВА I.

ПРИНЦИПЫ КИНЕТИКИ И ГЛАВНЫЯ ЗАДАЧИ КИНЕТИКИ ТОЧКИ.

§ 1. *Принципы кинетики.*

При изложеніи кинетики мы будемъ основываться на трехъ принципахъ, устанавливающихъ связь между движеніемъ и тѣми причинами, которыми оно вызывается; - эти принципы принимаются нами безъ доказательствъ.

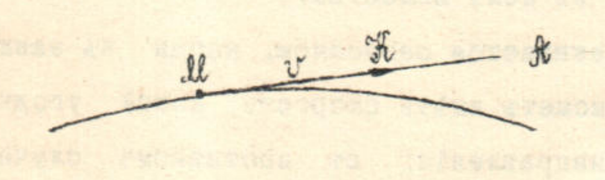
Первый принципъ (принципъ инерціи, первый законъ Ньютона)*).

Свободной матеріальной точкѣ свойственно сохранять безъ измѣненія величину и направленіе своей скорости.

Изъ этого принципа мы выводимъ прежде всего два слѣдствія.

Слѣдствіе I. Если свободная матеріальная точка находится въ покоѣ, т.е. имѣетъ скорость, равную нулю, то ей свойственно оставаться въ покоѣ.

Слѣдствіе II. Если свободная матеріальная точка въ данный моментъ находится въ движеніи, то ей свойственно далѣе двигаться прямолинейно и равномѣрно съ тою скоростью, которую она имѣла въ данный моментъ.



Чертежъ 112.

На черт.112 отрѣзокъ MK изображаетъ скорость v точки M въ нѣкоторый моментъ t, а линія MA ту прямую, которую должна бы была опи-

---

*) "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" 1687.

сать точка послѣ этого момента, двигаясь съ постоянной скоростью на основаніи слѣдствія II.

Причины, обусловливающія такое состояніе свободной матеріальной точки, которое не объясняется принципомъ инерціи, называются *силами*.

Сила, слѣдовательно, есть та причина, которая или покоющуюся точку приводитъ въ движеніе, или точку двигающуюся заставляетъ двигаться или по прямой, но неравномѣрно, или по кривой; короче говоря, *сила есть та причина, которая производитъ измѣненіе скорости точки, т.е. сообщаетъ точкѣ ускореніе.*

Силы по своему происхожденію бываютъ весьма разнообразны, какъ-то: сила тяжести, сила всемірнаго тяготѣнія, силы сопротивленія среды, силы упругости, силы электрическія, магнитныя и пр.

Не интересуясь ни происхожденіемъ, ни характеромъ силъ, механика разсматриваетъ только три свойства силы: *точку приложенія, направленіе и величину.*

Второй принципъ. Сила, приложенная къ свободной матеріальной точкѣ, имѣетъ направленіе сообщаемаго ею ускоренія и по величинѣ пропорціональна этому ускоренію.

Если силу, приложенную къ матеріальной точкѣ, обозначимъ черезъ F, ускореніе, сообщаемое ею, черезъ $\dot{v}$, то F имѣетъ одинаковое направленіе съ $\dot{v}$, и, кромѣ того, по величинѣ:

$$F = m\dot{v}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ m есть коэффиціентъ пропорціональности; этотъ коэффиціентъ мы называемъ *массою* матеріальной точки.

Для уясненія этого новаго понятія возьмемъ простѣйшій случай, именно тотъ, когда на свободную матеріальную точку дѣйствуетъ только сила тяжести.

Какъ извѣстно, ускореніе, сообщаемое силою тяжести, направлено по вертикали внизъ и равно

$$g = 981 \frac{\text{сантм.}}{(\text{сек.})^2}.$$

Если возьмемъ двѣ матеріальныя точки, массы которыхъ будутъ m_1 и m_2, а соотвѣтственные вѣса въ данномъ мѣстѣ земной поверхности p_1 и p_2, то въ силу уравненія (1) имѣемъ:

$$p_1 = m_1 g,$$

$$p_2 = m_2 g,$$

откуда

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2};$$

слѣдовательно, *массы матеріальныхъ точекъ пропорціональны ихъ вѣсамъ;* поэтому, если вѣса двухъ матеріальныхъ точекъ равны, то мы можемъ утверждать, что и *массы ихъ равны*.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ возможность *измѣрять* массы.

Въ той системѣ, въ которой за единицу длины принимаютъ одинъ сантиметръ, а за единицу времени одну секунду,- за единицу массы принимаютъ *массу одного грамма*, такъ что, если какое либо тѣло вѣситъ n граммовъ, то масса этого тѣла выражается числомъ n.

Итакъ, мы имѣемъ теперь всѣ эти три основныхъ единицы: единицу массы (M), единицу длины (L) и единицу времени (T).

Наиболѣе часто употребляется система единицъ: граммъ, сантиметръ, секунда; эта система называется для краткости "система CGS".

Единица силы будетъ единица производная и получится, когда мы единицу массы умножимъ на единицу ускоренія:

$$\text{ед. силы} = (\text{ед. массы}) \times (\text{ед. ускор.}) =$$

$$= \frac{(\text{ед. массы}) \times (\text{ед. длины})}{(\text{ед. врем.})^2} = MLT^{-2}.$$

Единицей силы вообще называется такая сила, которая матеріальной точкѣ, имѣющей массу, равную единицѣ, сообщитъ ускореніе, равное единицѣ.

Въ системѣ CGS сила, равная единицѣ, будетъ такая, которая матеріальной точкѣ, масса которой равна одному грамму, сообщитъ ускореніе, равное одному $\frac{\text{сант.}}{(\text{сек})^2}$; - эта сила называется *дина*.

Дина - сила весьма малая; она равна $\frac{1}{981}$ вѣса одного грамма*).

Изъ формулы (1) слѣдуетъ:

$$\dot{v} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Такъ какъ при этомъ ускореніе $\dot{v}$ и сила $\mathbf{F}$ имѣютъ одинаковое направленіе, то проекція ускоренія $\dot{v}$ на какую угодно ось равна раздѣленной на массу m проекціи силы $\mathbf{F}$ на ту же ось. Проектируя ускореніе $\dot{v}$ и силу $\mathbf{F}$ на координатныя оси, находимъ:

$$\dot{v}.\cos(\dot{v}, X) = \frac{1}{m}\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F}, X),$$

$$\dot{v}.\cos(\dot{v}, Y) = \frac{1}{m}\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F}, Y),$$

$$\dot{v}.\cos(\dot{v}, Z) = \frac{1}{m}\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F}, Z);$$

откуда, по умноженіи на массу m, получимъ:

---

*) *Если дано статическое выраженіе величины силы въ единицахъ вѣса, то въ кинетикѣ это число должно быть умножено на величину ускоренія силы тяжести.*

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. МЕЩЕРСКІЙ.

Изданіе Кассы Взаимопомощи Студ. СПБ. Политехн. Института.

Типо-литографія И. Трофимова. СПБ. Можайская, 8.

Корректоръ А Сабантѣевъ. *Листъ 11.*

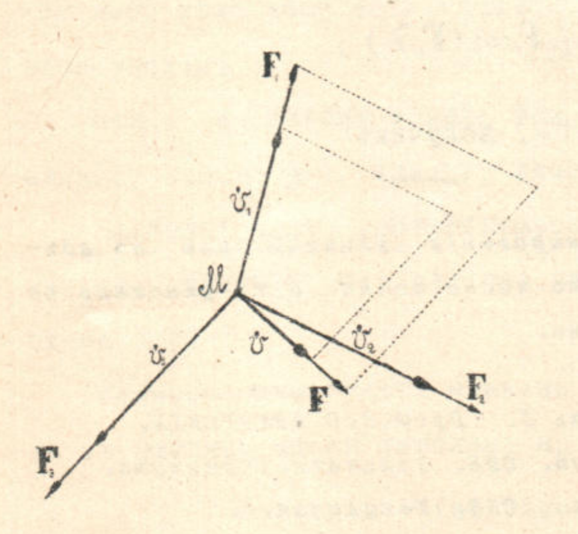
$$
\left.\begin{aligned}
m\dot{v}\cos(\dot{v},X)&=\mathbf{F}\cos(\mathbf{F},X),\\
m\dot{v}\cos(\dot{v},Y)&=\mathbf{F}\cos(\mathbf{F},Y),\\
m\dot{v}\cos(\dot{v},Z)&=\mathbf{F}\cos(\mathbf{F},Z);
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)
$$

Обозначая координаты материальной точки через x, y, z, а проекціи силы $\mathbf{F}$, къ ней приложенной, на координатныя оси через $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, получимъ аналитическое выраженіе принципа второго въ видѣ слѣдующихъ, вообще говоря, *трехъ уравненій:*

$$
\left.\begin{aligned}
m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}&=\mathbf{X},\\
m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}&=\mathbf{Y},\\
m\cdot\frac{d^2z}{dt^2}&=\mathbf{Z};
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)
$$

или

$$
m.x''=\mathbf{X},\quad m.y''=\mathbf{Y},\quad m.z''=\mathbf{Z}.
$$



Чертежъ 113.

Третій принципъ. При одновременномъ дѣйствіи на свободную матеріальную точку нѣсколькихъ силъ, ускореніе, получаемое точкой, равно по величинѣ и направленію геометрической суммѣ тѣхъ ускореній, которыя точка получаетъ

при дѣйствіи каждой изъ этихъ силъ въ отдѣльности.

Пусть $\dot{v}_1$ будетъ ускореніе, которое получаетъ точка, когда къ ней приложена только одна сила F_1 ; $\dot{v}_2$ ускореніе при дѣйствіи одной силы F_2 ; .... $\dot{v}_n$ ускореніе при дѣйствіи одной силы F_n ; тогда при одновременномъ приложеніи къ точкѣ этихъ силъ F_1 , F_2 , F_3 .... F_n (черт. 113) точка получитъ такое ускореніе $\dot{v}$, что

$$\bar{\dot{v}} = \bar{\dot{v}}_1 + \bar{\dot{v}}_2 + \bar{\dot{v}}_3 + \dots\dots\dots + \bar{\dot{v}}_n . \quad *)$$

Отсюда по умноженіи ускореній на число, выражающее массу точки, получимъ:

$$m\bar{\dot{v}} = m\bar{\dot{v}}_1 + m\bar{\dot{v}}_2 + m\bar{\dot{v}}_3 + \dots\dots + m\bar{\dot{v}}_n .$$

Отрѣзокъ, имѣющій величину $m\dot{v}$ и направленіе ускоренія $\dot{v}$, изображаетъ нѣкоторую силу F , а отрѣзки, входящіе геометрическими слагаемыми въ правой части полученнаго равенства, изображаютъ данныя силы: F_1 , F_2 , F_3 , ... F_n ; поэтому мы имѣемъ:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots\dots\dots + \bar{F}_n .$$

Сила F равна геометрической суммѣ силъ F_1 , F_2 .... F_n , слѣдовательно, *одновременное* дѣйствіе на точку данныхъ силъ можно, какъ и въ статикѣ, замѣнить дѣйствіемъ одной силы - ихъ *равнодѣйствующей.*

Если проекціи на координатныя оси силы F_1 обозначимъ черезъ X_1 , Y_1 , Z_1 , проекціи силы F_2 черезъ X_2 , Y_2 , Z_2 и вообще проекціи силы F_i черезъ X_i , Y_i , Z_i , то *проекціи равнодѣйствующей* будутъ:

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i ,$$

---

*) *Черта наверху показываетъ на то, что сумма геометрическая.*

$$\left.\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i, \\ Z &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_i. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Замѣняя данныя силы ихъ равнодѣйствующей, мы получимъ случай, къ которому относится второй принципъ*).

§ 2. *Главныя задачи кинетики точки.*

Съ помощью уравненій (2) или (3) мы можемъ рѣшать слѣдующія *двѣ задачи:*

I. Дано движеніе матеріальной точки; опредѣлить силу, подъ вліяніемъ которой это движеніе совершается.

II. Дана сила, приложенная къ точкѣ; опредѣлить движеніе, которое подъ вліяніемъ этой силы точка совершаетъ.

Первая задача рѣшается легко.

Движеніе точки опредѣляется тремя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

гдѣ $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ суть *данныя функціи* отъ времени t.

Дифференцируя эти функціи два раза по t, мы найдемъ проекціи ускоренія точки на координатныя оси:

$$x'' = f_1''(t),$$

---

*) ПРИМѢЧАНІЕ. *Къ этимъ тремъ принципамъ можетъ быть присоединенъ четвертый принципъ, установленный въ статикѣ:* всякому *дѣйствію соотвѣтствуетъ равное и противоположно направленное противодѣйствіе.*

$$y'' = f_2''(t),$$

$$z'' = f_3''(t).$$

На основанiи уравненiй (3) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= m.f_1''(t), \\ \mathbf{Y} &= m.f_2''(t), \\ \mathbf{Z} &= m.f_3''(t). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Отсюда найдемъ величину и направленiе искомой силы.

Когда точка движется въ одной *плоскости*, тогда принимая ее за плоскость XOY, мы силу опредѣлимъ съ помощью двухъ уравненiй:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= m.f_1''(t), \\ \mathbf{Y} &= m.f_2''(t), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6')$$

такъ какъ будетъ $\mathbf{Z} = 0$.

Въ случаѣ *прямолинейнаго* движенiя точки, принимая траекторiю точки за ось OX, получимъ одно уравненiе:

$$\mathbf{X} = m.f_1''(t), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6'')$$

такъ какъ двѣ другiя проекцiи $\mathbf{Y} = 0$, $\mathbf{Z} = 0$.

Въ формулахъ (6), (6'), (6") проекцiи силы выражаются въ функцiяхъ времени, но изъ уравненiй (5) время t мы можемъ выразить въ функцiи отъ любой координаты, а изъ уравненiй, которыя получаются дифференцированiемъ этихъ уравненiй,

$$x' = f_1'(t),$$

$$y' = f_2'(t),$$

$$z' = f_3'(t),$$

мы можемъ выразить t въ функцiи отъ проекцiй x', y', z' скорости точки; поэтому проекцiи силы, а слѣдовательно, и си-

лу, мы можемъ выразить черезъ время t, или черезъ координаты x, y, z, или черезъ проекціи скорости x', y', z'; такимъ образомъ, въ самомъ общемъ видѣ проекціи силы выражаются какъ нѣкоторыя функціи отъ t, x, y, z, x', y', z'.

Въ частномъ случаѣ проекціи силы могутъ быть величины постоянныя.

Примѣръ 1. Найдемъ силу, при дѣйствіи которой точка массы m совершаетъ по оси OX колебательное движеніе:

$$x = a.\cos kt.$$

Находимъ:

$$x' = -a.k\sin kt,$$

$$x'' = -a.k^2\cos kt;$$

поэтому сила $\mathbf{F}$ будетъ:

$$\mathbf{F} = -m.a.k^2\cos kt,$$

или

$$\mathbf{F} = -m.k^2x,$$

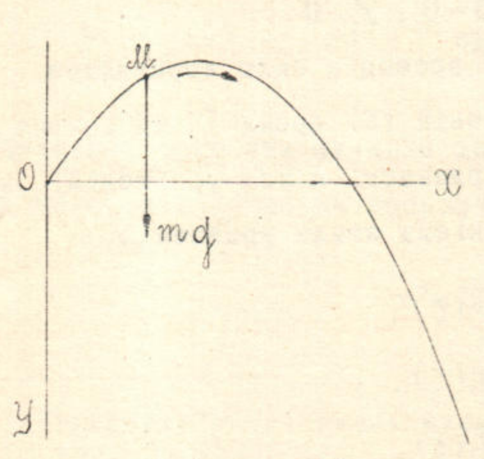
или

$$\mathbf{F} = -m.k.\sqrt{a^2k^2 - x'^2}.$$

Выбираемъ самое простое выраженіе:

$$\mathbf{F} = -m.k^2x,$$

которое показываетъ, что дѣйствующая сила есть сила притяженія къ началу координатъ, пропорціональная разстоянію движущейся точки отъ начала координатъ.



Чертежъ 114.

Примѣръ 2. Найдемъ силу, при дѣйствіи которой точка массы m описываетъ параболу въ вертикальной плоскости (черт. 114), причемъ координаты ея

выражаются формулами:

$$x = a.t,$$

$$y = bt + \frac{g.t^2}{2},$$

если ось OX горизонтальна, а ось OY направлена по вертикали внизъ.

Находимъ:

$$x'' = 0,$$

$$y'' = g;$$

слѣдовательно:

$$X = 0,$$

$$Y = mg.$$

Такимъ образомъ искомая сила имѣетъ постоянную величину mg и направлена по вертикали внизъ.

Рѣшеніе *второй задачи,* т.е. опредѣленіе движенія по данной силѣ, вообще говоря, несравненно труднѣе; - зная проекціи силы, какъ функціи въ общемъ случаѣ, отъ перемѣнныхъ t, x, y, z, x', y', z', мы должны съ помощью уравненій (3) найти координаты точки x, y и z, какъ функціи времени t; такъ какъ уравненія (3) всегда содержатъ вторыя производныя отъ координатъ по времени, а иногда и ихъ первыя производныя по времени, то они будутъ, такъ называемыя, *дифференціальныя уравненія;* эти уравненія нужно *интегрировать,* что представляетъ большія затрудненія.

Вторая задача будетъ подробно разсмотрѣна во второй части курса Теоретической Механики.

ГЛАВА II.

ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ.

§ 1. *Работа силы и живая сила матеріальной точки.*

Пусть сила $\mathcal{P}$, постоянная по величинѣ и направленію, напримѣръ, сила тяжести, приложена къ матеріальной точкѣ, и точка проходитъ по направленію этой силы нѣкоторый путь h; тогда произведеніе силы на длину пройденнаго точкою пути: $\mathcal{P}h$, называется *работою* силы $\mathcal{P}$ на пути h.

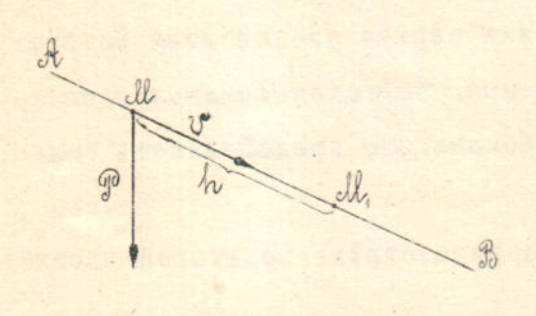
Единица работы: (ед.силы) × (ед.дл.) = MLT^{-2}. Въ системѣ CGS единица работы будетъ работа силы, равной одной динѣ на протяженіе одного сантиметра по направленію силы;-эта единица работы называется *эргъ*.

Такъ какъ эргъ единица очень малая, то часто употребляются другія единицы работы:

Килограммометръ = 981.10^5 эрговъ,

пудофутъ = 5 килограммометрамъ*);

и т.д.



Чертежъ 115.

Если точка движется подъ *нѣкоторымъ угломъ* къ направленію приложенной къ ней постоянной силы, то *работа силы* на протяженіи пути h точки (черт.115) есть произведеніе силы на

*) ПРИМѢЧАНІЕ. *Работа въ теченіе нѣкотораго опредѣленнаго промежутка времени, напр., въ одну секунду, наз. "мощностью"; единица мощности – лошад. сила = 15 пудофутовъ въ секунду.*

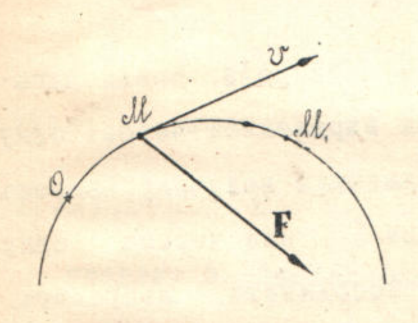
длину пути h и на косинусъ угла между направленіемъ силы и скоростью точки:

$$P.h.\cos(P, v).$$

Работа силы будетъ *положительною,* если уголъ (P, v) острый, *отрицательною,* если уголъ (P, v) тупой, и *равною нулю,* если уголъ (P, v) прямой.

Для того, чтобы установить понятіе о работѣ въ *общемъ случаѣ,* т.е. въ случаѣ перемѣнной силы и криволинейнаго движенія точки, необходимо ввести понятіе объ *элементарной работѣ.*

Каковы бы ни были движеніе точки и сила, къ ней приложенная, *безконечно малое перемѣщеніе* точки мы можемъ разсматривать, какъ прямолинейное, а направленіе и величину силы при безконечно маломъ перемѣщеніи точки можемъ считать постоянными*).



Чертежъ 116.

Пусть s будетъ дуга траекторіи точки M, отсчитываемая отъ произвольно выбранной неподвижной точки O (чертежъ 116), тогда элементъ пути:

$$MM_1 = |ds|,$$

гдѣ разсматривается только абсолютная величина дифференціала ds, такъ что

$$|ds| = v.dt.$$

Элементарной работой силы, приложенной къ матеріальной точкѣ, называется произведеніе величины силы на элементъ пути и на косинусъ угла между направленіемъ силы и направленіемъ

---

*) *Допускаемая при этомъ погрѣшность въ выраженіи соотвѣтствующей работы будетъ безконечно малая величина второго порядка.*

скорости:

$$\mathbf{F}.|ds|.\cos(\mathbf{F},v);$$

элементарная работа силы будетъ *положительною,* если уголъ $(\mathbf{F}, v)$ острый, *отрицательною,* если уголъ $(\mathbf{F}, v)$ тупой, и *равною нулю,* если уголъ $(\mathbf{F}, v)$ прямой.

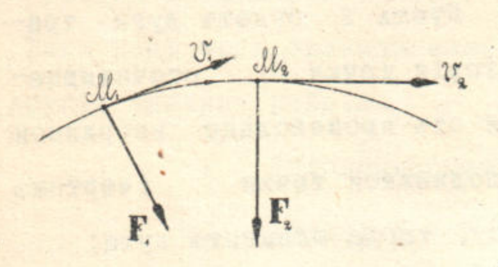
Работа силы $\mathbf{F}$ *на нѣкоторой конечной части пути* M_1M_2 (черт. 117) точки есть предѣлъ, къ которому приближается сумма элементарныхъ работъ силы $\mathbf{F}$ на этой части пути, при уменьшенiи соотвѣтствующихъ элементовъ пути до нуля, т.е.

$$\sum \mathbf{F}.|ds|.\cos(\mathbf{F},v);$$

этотъ предѣлъ есть интегралъ

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v).|ds|,$$

причемъ величина, стоящая подъ знакомъ интеграла, предполагается выраженной черезъ одну перемѣнную величину: черезъ время t, или черезъ одну изъ координатъ, напримѣръ, черезъ x, или черезъ дугу s *); предѣлы интегрированiя будутъ значенiя этой перемѣнной, соотвѣтствующiя положенiямъ точки M_1 и M_2; въ первомъ случаѣ t_1 и t_2, во второмъ x_1 и x_2, въ третьемъ s_1 и s_2.

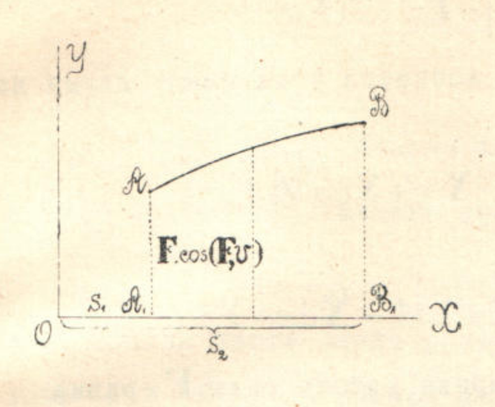


Чертежъ 117.

Замѣтимъ, что интегралъ $\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v).|ds|$ можемъ изобразить нѣкоторой *площадью,* напримѣръ, при $\cos(\mathbf{F},v) > 0$, пло-

---

*) *При движенiи точки координаты ея суть нѣкоторыя функцiи отъ времени: поэтому всѣ три величины: сила* $\mathbf{F}$, $\cos(\mathbf{F},v)$ *и дуга* s *также нѣкоторыя функцiи отъ времени* t; *но, вмѣсто* t, *можно ввести какую либо другую перемѣнную величину, связанную съ* t, *напримѣръ,* x, s *и т. д.*



Чертежъ 118.

щадью A_1ABB_1, изображенной на чертежѣ 118. Линію AB строимъ по точкамъ, откладывая по оси OX значенія перемѣнной s, а по оси OY соотвѣтствующія величины проекціи силы на направленіе скорости: $\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v)$.

ТЕОРЕМА 1. Элементарная работа равнодѣйствующей нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной матеріальной точкѣ, равна суммѣ работъ составляющихъ силъ на томъ же элементѣ пути.

Если $\mathbf{F}$ есть равнодѣйствующая силъ: $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ ...... $\mathbf{F}_n$, то

$$\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v)=\mathbf{F}_1.\cos(\mathbf{F}_1,v)+\mathbf{F}_2.\cos(\mathbf{F}_2,v)+\ldots\ldots+\mathbf{F}_n.\cos(\mathbf{F}_n,v).$$

откуда по умноженіи на элементъ пути $|ds|$ получаемъ:

$$\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v).|ds|=\mathbf{F}_1.\cos(\mathbf{F}_1,v).|ds|+\mathbf{F}_2.\cos(\mathbf{F}_2,v).|ds|+\ldots+\mathbf{F}_n.\cos(\mathbf{F}_n,v).|ds|\,.. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 2. Работа равнодѣйствующей нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной матеріальной точкѣ, на нѣкоторой конечной части пути равна суммѣ работъ составляющихъ силъ на той же части пути.

Въ самомъ дѣлѣ, проинтегрировавъ обѣ части уравненія (1), получимъ:

$$\int_{M_1}^{M_2}\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v).|ds|=\int_{M_1}^{M_2}\mathbf{F}_1.\cos(\mathbf{F}_1,v)|ds|+\int_{M_1}^{M_2}\mathbf{F}_2.\cos(\mathbf{F}_2,v).|ds|+\ldots+\int_{M_1}^{M_2}\mathbf{F}_n.\cos(\mathbf{F}_n,v).|ds|.$$

Это равенство и выражаетъ теорему 2-ую.

Найдемъ выраженіе *элементарной работы* черезъ *проекціи силы:* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ на оси декартовыхъ координатъ и *координаты точки:* x, y, z, - получимъ:

$$|ds|=v.dt\,;$$

поэтому

$$\mathbf{F}\cos(\mathbf{F},v).\left|ds\right| = \mathbf{F}.v.\cos(\mathbf{F},v).dt\ ;$$

но, по извѣстной формулѣ для косинуса угла между двумя направленіями, имѣемъ:

$$\mathbf{F}.v.\cos(\mathbf{F},v) = \mathbf{X}\,x' + \mathbf{Y}\,y' + \mathbf{Z}\,z',$$

слѣдовательно:

$$\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v).\left|ds\right| = (\mathbf{X}x' + \mathbf{Y}y' + \mathbf{Z}z').dt = \mathbf{X}.dx + \mathbf{Y}.dy + \mathbf{Z}.dz\,.$$

Такимъ образомъ, элементарная работа силы $\mathbf{F}$ равна

$$\mathbf{X}.dx + \mathbf{Y}.dy + \mathbf{Z}.dz\,.$$

Отсюда слѣдуетъ, что работа силы на нѣкоторой конечной части пути M_1M_2 можетъ быть представлена въ видѣ интеграла:

$$\int_{M_1}^{M_2}(\mathbf{X}.dx + \mathbf{Y}.dy + \mathbf{Z}.dz)\,,$$

предполагая, что всѣ величины подъ знакомъ интеграла выражены черезъ одну перемѣнную величину, напримѣръ, черезъ t, или черезъ x, или черезъ s и т.д.

------- " -------

Живою силою матеріальной точки или кинетическою энергіей матеріальной точки называется половина произведенія массы точки на квадратъ ея скорости: $\frac{m.v^2}{2}$.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что живая сила измѣряется тѣми же единицами, что и работа силы: ML^2T^{-2} ; въ системѣ CGS единица живой силы будетъ

$$\frac{\text{граммъ}.(\text{сант.})^2}{(\text{сек.})^2}.$$

§ 2. *Законъ живой силы.*

Возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія точки:

$$mx''=\mathbf{X}\ ,\ my''=\mathbf{Y}\ ,\ mz''=\mathbf{Z}\ ;$$

умножимъ правыя части этихъ уравненій соотвѣтственно на dx, dy, dz, а лѣвыя на равныя имъ величины $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$, и сложимъ, тогда получимъ:

$$m(x'x''+y'y''+z'z'').dt=\mathbf{X}.dx+\mathbf{Y}.dy+\mathbf{Z}.dz \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

но

$$m(x'x''+y'y''+z'z'').dt=m(x'dx'+y'dy'+z'dz')=$$

$$=d\left[\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)\right]=d\frac{mv^2}{2}\ ;$$

слѣдовательно, уравненіе (2) представится въ видѣ:

$$d\frac{mv^2}{2}=\mathbf{X}.dx+\mathbf{Y}.dy+\mathbf{Z}.dz\ ;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или, на основаніи предидущаго параграфа:

$$d\frac{mv^2}{2}=\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v).|ds|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3_1)$$

Уравненіе (3) или (3_1) выражаетъ *законъ живой силы* въ случаѣ матеріальной точки:

безконечно малое приращеніе живой силы матеріальной точки, получаемое ею на протяженіи элемента пути, равно элементарной работѣ равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на томъ же элементѣ пути.

Пусть M_1 и M_2 будутъ крайнія положенія матеріальной точки на нѣкоторой конечной части ея пути, а v_1 и v_2 соотвѣтствующія скорости точки; возьмемъ интегралы отъ обѣихъ частей уравненія (3) въ предѣлахъ отъ M_1 до M_2; тогда получимъ:

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\int_{M_1}^{M_2}(\mathbf{X}.dx+\mathbf{Y}.dy+\mathbf{Z}.dz)\,, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

или

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\int_{M_1}^{M_2}\mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},v).\left|ds\right|\ldots\ldots\ldots\ldots (4_1)$$

Уравненіе (4) или (4_1) даетъ другое выраженіе *закона живой силы:*

приращеніе живой силы матеріальной точки, получаемое ею на нѣкоторой конечной части пути, равно работѣ на этой части пути равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Уравненія (4) или (4_1) позволяютъ намъ опредѣлить *работу* силы, приложенной къ точкѣ, если даны: масса точки и скорость ея какъ въ началѣ, такъ и въ концѣ этого пути.

Съ помощью уравненій (4) или (4_1) можемъ также опредѣлить *скорость* точки въ какомъ либо положеніи, если извѣстны ея масса и скорость въ какомъ либо другомъ положеніи и затѣмъ работа приложенной силы на всемъ пути отъ одного изъ этихъ положеній до другого.

Примѣнимъ уравненія (3) и (4) къ случаю *силы тяжести.*

Вертикальную плоскость, въ которой точка движется, примемъ за плоскость XOY и ось OY направимъ по вертикали внизъ; тогда проекціи силы тяжести будутъ:

$$\mathbf{X}=0\;,\;\mathbf{Y}=mg\;,\;\mathbf{Z}=0\;,$$

и мы получимъ

$$d\frac{mv^2}{2}=mg.dy\;,$$

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=mg.(y_2-y_1).$$

Полученныя формулы показываютъ, что при движеніи матеріальной точки подъ вліяніемъ силы тяжести живая сила точки возрастаетъ, когда точка движется внизъ, и убываетъ, когда она

движется вверхъ.

При этомъ абсолютная величина измѣненія живой силы точки равна произведенію вѣса точки на ту высоту, на которую точка опускается или поднимается въ разсматриваемой части пути.

Понятія: "работа силы" и "живая сила", установленныя здѣсь для матеріальной точки, распространяются затѣмъ на тѣ случаи, когда размѣрами тѣла мы не пренебрегаемъ, и слѣдовательно, тѣло не можемъ разсматривать, какъ матеріальную точку, — напримѣръ, когда твердое тѣло вращается около оси.

Эти случаи будутъ разсмотрѣны во второй части курса "Теоретической Механики".

ОГЛАВЛЕНІЕ.

(Цифры въ скобкахъ указываютъ №№ страницъ).

СТАТИКА ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

КИНЕМАТИКА.

(Основныя понятія).

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.

------ " ------

Цѣна 1р. 10 к. въ переп.

ПАРОВ. ПЕРЕПЛ. ФРИДРИХА КАНЪ С.П.Б.